

第五讲：弹塑性理论基础

弹塑性力学研究生核心课程

任晓丹

同济大学建筑工程系

December 10, 2017

主要内容

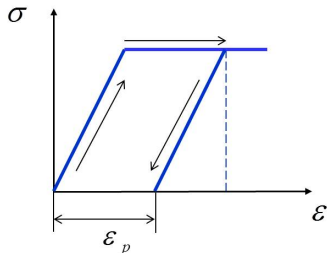
- ① 概述
- ② 弹塑性理论
 - 一维弹塑性理论
 - 理想弹塑性模型
 - 线性硬化模型
 - 非线性硬化模型
 - 多维弹塑性理论
 - 屈服函数
 - 强化法则
 - 塑性演化
 - 相关流动与非相关流动
- ③ 实用弹塑性模型
 - 金属类材料塑性模型
 - 其它材料塑性模型
- ④ 弹塑性理论数值算法初步
 - 微分方程数值算法

维多均前系数值算法

参考书

- Jacob Lubliner. Plastic Theory. 2008, Dover Publication, New York.
- W.F. Chen and D.J. Han. 1988. Plasticity for structural Engineers. Springer-Verlag, New York.
- 陈惠发, 萨里普 (余天庆、王勋文、刘再华译), 2004. 弹性与塑性力学. 中国建筑工程工业出版社: 北京.
- Juan C. Simo and Thomas R.J. Hughes. 1997, Computational Inelasticity. Springer, New York.

塑性的定义



In physics and materials science, **plasticity** describes the deformation of a material undergoing **non-reversible changes of shape** in response to applied forces. ¹

¹Jacob Lubliner. Plastic Theory. 2008, Dover Publication, New York.

实验现象：屈服和强化

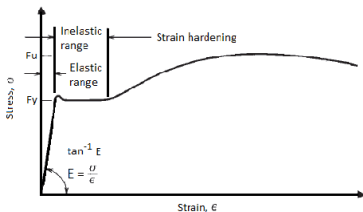


Figure 1

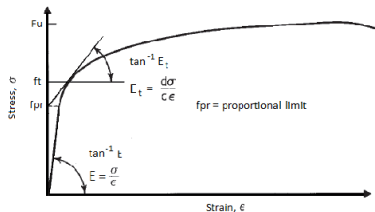
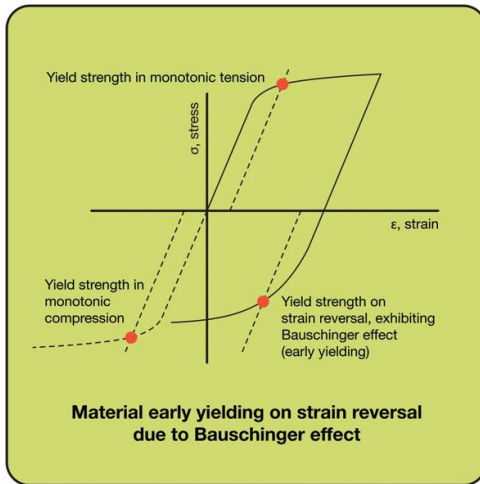


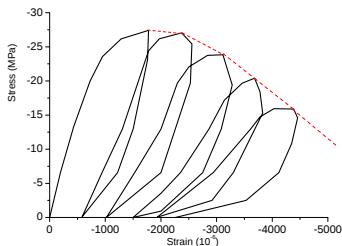
Figure 2

有明显屈服点的钢材和没有明显屈服点的钢材

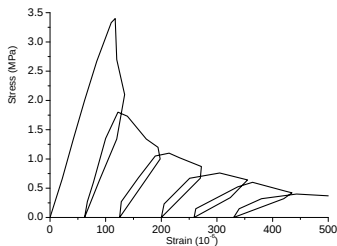
实验现象：包兴格效应



实验现象：混凝土的塑性



重复加载受压实验²

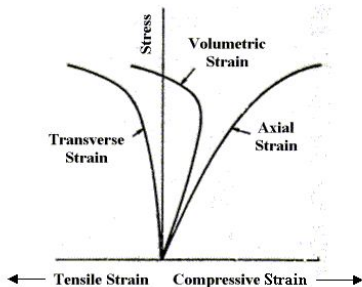


重复加载受拉实验³

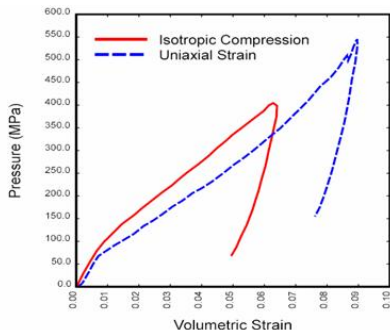
²Karsan I D, Jirsa J O. Behavior of Concrete under Compressive Loadings. Journal of the Structural Division, 1969, 95(12):2543–2563.

³Taylor R L. FEAP: A finite element analysis program for engineering workstation Rep. No. UCB/SEMM-92 (Draft Version).

实验现象：混凝土的塑性



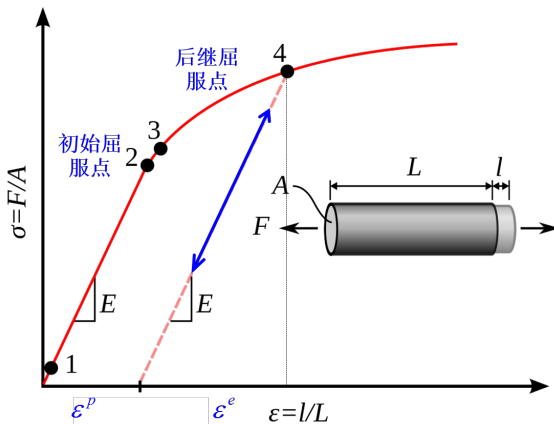
单轴受压实验



约束受压实验

(<http://www.fhwa.dot.gov/publications/research/infrastructure/pavements/05062/chapt2a.cfm>)

标准（一维）塑性模型

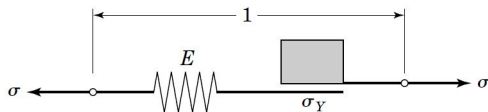


塑性与非线性

- 残余应变是塑性的直接体现，也是塑性力学引入的主要状态量。
- 发生残余应变之后，材料结构产生了某些不可逆的变化。
- 材料结构的不可逆变化与材料非线性行为之间有着紧密的联系。
- 残余应变 $\Rightarrow$ 材料结构不可逆变化 $\iff$ 材料非线性

一维弹塑性理论

一维弹塑性物理模型



弹簧摩擦元模型

- 应变弹塑性分解

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

- 应力应变关系

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad \dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$$

- 任务：引入 ε^p 的表达式，建立以 σ 、 ε 及、 ε^p 为状态量的闭合的理论体系

一维弹塑性模型数学分析

- 基本方程全量形式

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

- 补充方程全量形式

$$f(\sigma) = 0 \text{ or } f(\sigma, \varepsilon^p) = 0$$

方程数等于未知量数，不必要时继续补充方程！

- 率形式

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad , \quad \dot{f}(\sigma) = 0 \text{ or } \dot{f}(\sigma, \varepsilon^p) = 0$$

弹塑性模型数学分析

- 多维弹塑性基本方程

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \text{ or } \dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p)$$

- 补充方程（屈服条件）

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ or } f(\sigma_{ij}, \alpha_k) = 0$$

方程数少于未知量数，须继续补充方程！

- 多维塑性演化

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \Gamma_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}} \rightarrow \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

一维弹塑性模型数学分析

- 基本方程

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad \dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$$

- 补充方程

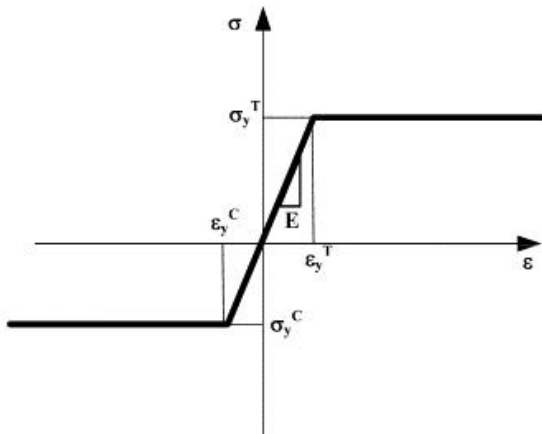
$$f(\sigma) = 0 \text{ or } f(\sigma, \varepsilon^p) = 0, \quad \dot{f}(\sigma) = 0 \text{ or } \dot{f}(\sigma, \varepsilon^p) = 0$$

参照多维形式的补充方程！

- 一维塑性演化方程

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} \rightarrow \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

一维理想弹塑性模型



理想弹塑性模型

一维理想弹塑性模型

- 屈服函数

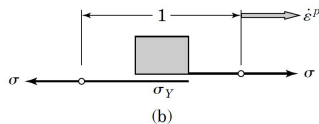
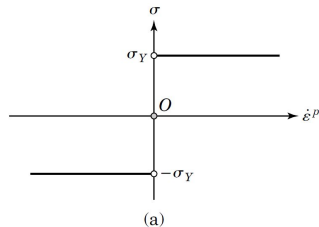
$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y$$

- 弹性阶段

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y < 0, \dot{\varepsilon}^p = 0$$

- 屈服阶段

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0, \dot{\varepsilon}^p \neq 0$$



一维理想弹塑性模型

- 塑性演化

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial (|\sigma| - \sigma_Y)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma)$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} \dot{\lambda} & \sigma = \sigma_Y \\ -\dot{\lambda} & \sigma = -\sigma_Y \end{cases}$$

- 一致性条件

$$f(\sigma) = 0 \Rightarrow \dot{f}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) = 0$$

- 塑性应变表达式

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) \Rightarrow \dot{\lambda} = \text{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon} \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}$$

一维理想弹塑性模型

- 应力状态判别
 - 弹性状态

$$f < 0, \dot{\lambda} = 0$$

- 屈服面卸载

$$f = 0, (f^* < 0, f = 0) \rightarrow f^* - f < 0, \dot{\lambda} = 0$$

- 塑性加载

$$f = 0, (f^* = 0, f = 0) \rightarrow f^* - f = 0, \dot{\lambda} > 0$$

一维理想弹塑性模型

- 应力状态判别

- 弹性状态

$$f < 0, \dot{\lambda} = 0$$

- 屈服面卸载

$$f = 0, \dot{f} < 0, \dot{\lambda} = 0$$

- 塑性加载

$$f = 0, \dot{f} = 0, \dot{\lambda} > 0$$

- 加、卸载 (Kuhn-Tucker) 条件

$$f \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} f = 0$$

线性各向同性硬化模型

- 屈服函数

$$f(\sigma) = |\sigma| - q$$

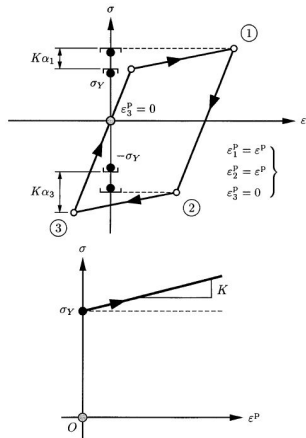
- 硬化法则（各向同性线性）

$$q = \sigma_Y + K\alpha, \quad \dot{q} = K\dot{\alpha}$$

- 塑性内变量

$$\alpha := \int_T |\dot{\varepsilon}^p| dt$$

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| \geq 0$$



线性各向同性硬化模型

- 塑性演化

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \operatorname{sign}(\sigma), \quad \dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| = \dot{\lambda}$$

- 一致条件

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= 0 \\ \Rightarrow \dot{f}(\sigma) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - K \dot{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E (\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) - K \dot{\lambda} = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{E}{E+K} \dot{\varepsilon} \operatorname{sign}(\sigma) \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E+K} \dot{\varepsilon} \end{cases} \end{aligned}$$

线性各向同性硬化模型

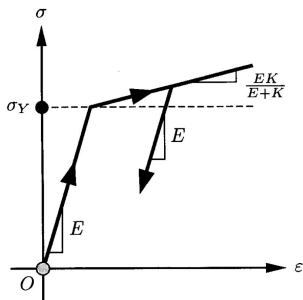
- 增量应力应变关系

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E^{ep}\dot{\varepsilon}$$

- 切线模量

$$E^{ep} = \begin{cases} E & \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{EK}{E+K} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

- 加、卸载 (Kuhn-Tucker)
条件 (同前)



非线性硬化模型

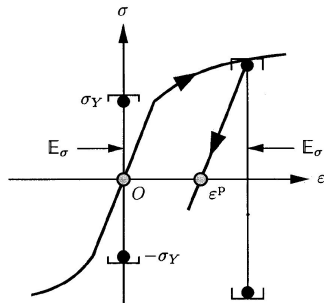
- 屈服条件

$$f(\sigma) = |\sigma| - q$$

- 硬化法则

$$q = q(\alpha), \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \dot{\alpha} := H \dot{\alpha}$$

- 塑性变量 α (同前)



非线性硬化模型

- 塑性演化： $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma)$, $\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| = \dot{\lambda}$
- 一致条件

$$f(\sigma) = 0$$

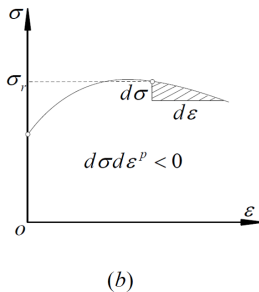
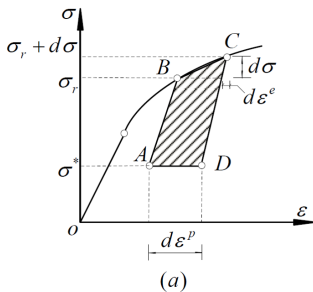
$$\Rightarrow \dot{f}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - H \dot{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) - H \dot{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{E}{E+H} \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E+H} \dot{\varepsilon} \end{cases}$$

- 增量本构关系

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E^{ep} \dot{\varepsilon}, \quad E^{ep} = \begin{cases} E & \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{EH}{E+H} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

稳定性假设



$$d\sigma d\epsilon \geq 0 \Leftrightarrow d\sigma(d\epsilon - d\epsilon^p) \geq 0 \rightarrow d\sigma d\epsilon^p \geq 0$$

$$(\sigma_r - \sigma^*)d\epsilon + \frac{1}{2}d\sigma d\epsilon \geq 0 \rightarrow (\sigma_r - \sigma^*)d\epsilon \geq 0$$

多维弹塑性理论

多维弹塑性理论基本公式

- 应变弹塑性分解

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

- 应力应变关系

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p)$$

- 任务：

- 引入 ε_{ij}^p 的表达式，建立关于状态量 σ_{ij} 、 ε_{ij} 及 ε_{ij}^p 的闭合理论体系
- 求解 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 、 E_{ijkl}^{ep} ，进而可进行结构非线性分析

弹塑性模型数学分析

- 多维弹塑性基本方程

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \text{ or } \dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p)$$

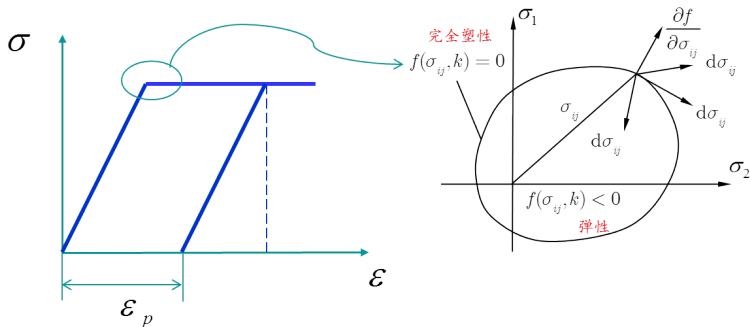
- 补充方程（屈服条件）

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ or } f(\sigma_{ij}, \alpha_k) = 0$$

- 多维塑性演化

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \Gamma_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}} \rightarrow \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

屈服函数



从一维空间的一个点到多维空间的曲面

二阶实对称张量

- 对于二阶张量，若满足分量取实数值且 $S_{ij} = S_{ji}$ ，则称之为二阶实对称张量。
- 二阶张量的特征方程为

$$S_{ij}n_j = \lambda n_i$$

整理得

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \quad \begin{cases} I_1 = S_{kk} \\ I_2 = \frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij} - S_{ii}S_{jj}) \\ I_3 = \det(S_{ij}) \end{cases}$$

- 可以证明：**实对称张量特征值为实数，特征向量相互正交。**

二阶实对称张量

- 将二阶张量分解为球张量 P 和偏张量 D 两部分

$$S_{ij} = P_{ij} + D_{ij}, \quad \begin{cases} P_{ij} = \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \\ D_{ij} = S_{ij} - P_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \end{cases}$$

- 偏张量满足 $D_{kk} = 0$ ，其特征方程为

$$\eta^3 - J_1 \eta^2 - J_2 \eta - J_3 = 0 \quad \begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \\ J_3 = \det(D_{ij}) \end{cases}$$

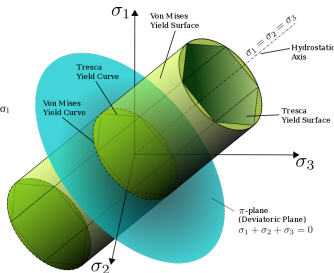
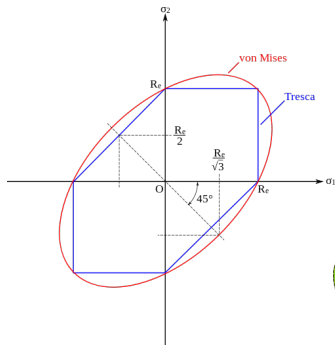
- 上述讨论中给出的 I_1 , I_2 , I_3 , J_2 以及 J_3 统称为张量 S 的不变量。

屈服函数

- Tresca 屈服函数：

$$f = \frac{1}{2} \max_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) - q = 0$$

- von Mises 屈服函数： $f = \sqrt{J_2} - q = 0$

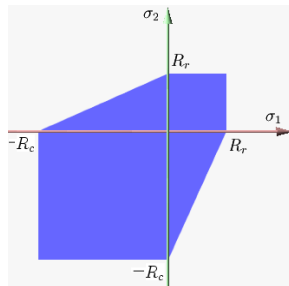
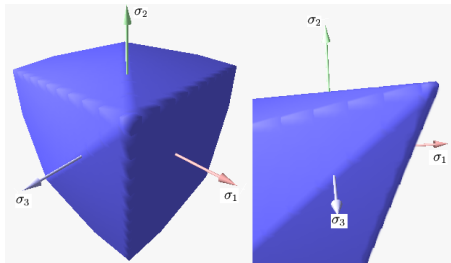


屈服函数

- Mohr-Coulomb 屈服函数：

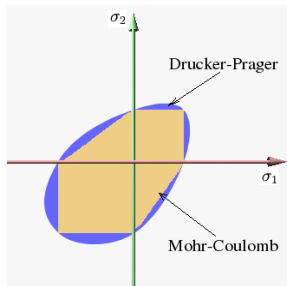
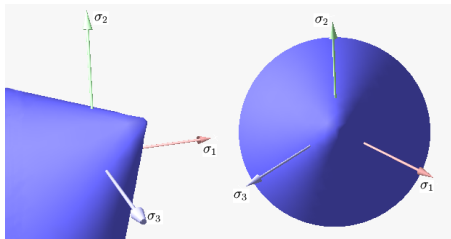
$$f = \frac{m+1}{2} \max_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j| + K(\sigma_i + \sigma_j)) - q_c = 0$$

其中, $m = \frac{f_c}{f_t}$, $K = \frac{m-1}{m+1}$



屈服函数

- Drucker-Prager 屈服函数：
$$f = \sqrt{J_2} + BI_1 - q = 0$$



屈服函数

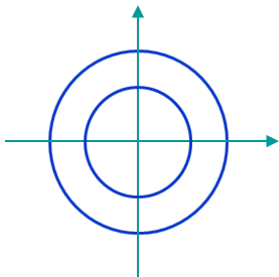
破坏准则	参 数 数 目	原表达式	统一表达式
		(1) $\sigma_0 = A + B\tau_0 + C\tau_0^2$	
Ottosen	4	$a \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + b \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0$	$\sigma_0 = \frac{1}{3b} - \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{\lambda}{b} \tau_0 - \frac{a}{2b} \tau_0^2$
Hsieh-Ting-Chen	4	$a \frac{J_2}{f_c^2} + b \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + c \frac{\sigma_1}{f_c} + d \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0$	$\sigma_0 = (\frac{1}{3d} - \frac{c}{3d} \frac{\sigma_1}{f_c}) - \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{b}{d} \tau_0 - \frac{a}{2d} \tau_0^2$
Podgorski	5	$\sigma_{oct} - c_0 + c_1 P \tau_{oct} + c_2 \tau_{oct}^2 = 0$	$\sigma_0 = c_0 - c_1 P \cdot \tau_0 - c_2 f_c \cdot \tau_0^2$
(2) $\tau_0 = D + E\sigma_0 + F\sigma_0^2$			
Bresler-Pister	3	$\frac{\tau_{oct}}{f_c} = a - b \frac{\sigma_{oct}}{f_c} + c(\frac{\sigma_{oct}}{f_c})^2$	$\tau_0 = a - b\sigma_0 + c\sigma_0^2$
Willam-Warnke	5	$\theta = 0^\circ$	$\tau_{ot} = \frac{a_0}{\sqrt{0.6}} + \frac{a_1}{\sqrt{0.6}} \sigma_0 + \frac{a_2}{\sqrt{0.6}} \sigma_0^2$
		$\frac{\tau_{oct}}{f_c} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_{oct}}{f_c} + a_2 (\frac{\sigma_{oct}}{f_c})^2$	$\tau_{oc} = \frac{b_0}{\sqrt{0.6}} + \frac{b_1}{\sqrt{0.6}} \sigma_0 + \frac{b_2}{\sqrt{0.6}} \sigma_0^2$
		$\theta = 60^\circ$	
		$\frac{\tau_{oct}}{f_c} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_{oct}}{f_c} + b_2 (\frac{\sigma_{oct}}{f_c})^2$	
(3) $\tau_0 = G[\phi(\sigma_0)]^H$			
Kotsovos	5	$\theta = 0^\circ \quad \frac{\tau_{oct}}{f_c} = a(c - \frac{\sigma_{oct}}{f_c})^b$	G=a H=b $\phi = c - \frac{\sigma_{oct}}{f_c}$
		$\theta = 60^\circ \quad \frac{\tau_{oct}}{f_c} = d(c - \frac{\sigma_{oct}}{f_c})^e$	G=d H=e
过一王	5	$\tau_0 = a(\frac{b-\sigma_0}{c-\sigma_0})^d$	G=a H=d $\phi = \frac{b-\sigma_0}{c-\sigma_0}$

各向同性强化

考虑强化之后，屈服函数一般表达式为： $f(\sigma_{ij}, q_i) = 0$ ，其中 $q_i = (q_1, \dots, q_N)$ 称为塑性内变量，是一系列塑性应变历史的标量函数。数学表达式为： $f(\sigma_{ij}, q_i) = f(\sigma_{ij}) - q = f(\sigma_{ij}) - k(\alpha_i) = 0$

其中 $k(\alpha_i)$ 为标量函数，那么不失一般性，可认为 $k(\alpha_i) = k(\alpha)$ 。常用的塑性变量 α 的表达式有：

- 塑性功： $\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$
- 等效塑性应变： $\int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p$



运动强化

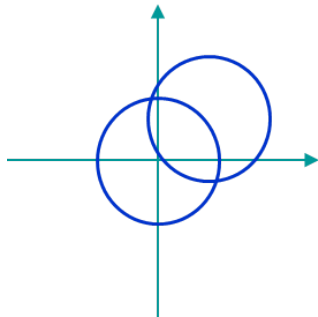
- 数学表达式为：

$$f(\sigma_{ij}, q_i) = f(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij}) - q = 0$$

- 令 $\bar{q}_{ij} = \bar{k}(\alpha)$ 即为经典随动强化
- Melan-Prager 模型

$$\bar{q}_{ij} = c\varepsilon_{ij}^p$$

- Ziegler 模型:
 $\dot{\bar{q}}_{ij} = \dot{\mu}(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij})$
- 记忆模型： $\dot{\bar{q}}_{ij} = c\varepsilon_{ij}^p - a\alpha\bar{q}_{ij}$



综合强化

- 数学表达式为：

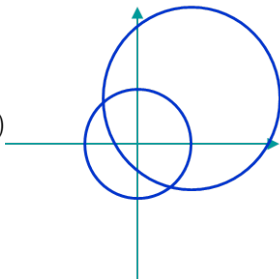
$$f(\sigma_{ij}, q_i) = F(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij}; \alpha_i) - k(\alpha) = 0$$

- Baltov-Sawczuk 模型

$$F(\sigma_{ij} - \bar{q}_i; \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij}) : A_{ijkl}(\alpha_m) : (\sigma_{kl} - \bar{q}_{kl})$$

$$A_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + A\epsilon_{ij}^p\epsilon_{kl}^p$$



流动法则

- 考虑塑性应变演化可以表示为如下形式：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r_{ij}(\sigma_{ij}, q_i)$$

- 塑性变量的演化：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j, \quad \dot{\alpha} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} r_{ij} r_{ij}} \\ \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \sigma_{ij} r_{ij} \end{cases}$$

塑性变量的演化总可以写为：

$$\dot{q}_i = -\dot{\lambda} h_i(\sigma_{ij}, q_i)$$

加卸载条件

- 加、卸载条件

$$\left\{ \begin{array}{l} f < 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \text{elastic} \\ f = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{f} < 0 \text{ and } \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \text{elastic unloading} \\ \dot{f} = 0 \text{ and } \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \text{neutral loading} \\ \dot{f} = 0 \text{ and } \dot{\lambda} > 0 \Rightarrow \text{plastic loading} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Kuhn-Tucker 条件

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0$$

弹塑性模型

- 多维弹塑性基本方程

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \text{ or } \dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p)$$

- 屈服条件 (一致条件)

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ or } f(\sigma_{ij}, \alpha_k) = 0$$

- 多维塑性演化

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r_{ij}(\sigma_{ij}, q_i)$$

- 以 $\dot{\lambda}$ 为切入点求解方程。

一致条件

- 塑性一致性条件

$$\begin{aligned}
 f = 0 &\Rightarrow \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} r_{kl} \right) - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_i} h_i = 0 \\
 &\Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} r_{kl} + \frac{\partial f}{\partial q_i} h_i}
 \end{aligned}$$

- 塑性应变率：

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \dot{\epsilon}_{mn}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} r_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{mn}$$

切线刚度

• 应力应变微分关系

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{mn} \right) \\
 &= \left(E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} E_{ijkl} r_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{mn} \right) \\
 &= \left(E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} r_{st}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{kl} \right) \\
 &= \left(E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} r_{st}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \right) \dot{\epsilon}_{kl}
 \end{aligned}$$

切线刚度

- 切线刚度张量

$$E_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} E_{ijkl} & \dot{\lambda} = 0 \\ E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} r_{st}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

最大塑性功原理

- 最大塑性功原理：实际塑性变形使得下述塑性功取最大值

$$W = \sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

- 约束条件： $f(\sigma_{ij}, q_i) \leq 0$
- 采用拉格朗日乘子法构造复合函数

$$\Pi = W - \dot{\lambda} f(\sigma_{ij}, q_i) = \sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p - \dot{\lambda} f(\sigma_{ij}, q_i)$$

对复合函数求偏导

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\epsilon}_{ij}^p - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

- Kuhn-Tucker 条件： $f \leq 0, \dot{\lambda} \geq 0, \dot{\lambda} f = 0$

相关塑性流动

- 正交流动： $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$
- 令： $\dot{q}_i = -\dot{\lambda} h_i \rightarrow -\dot{\lambda} H_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_j}$
- 塑性流动

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \dot{\varepsilon}_{mn}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial f}{\partial q_n}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial f}{\partial q_n}} \dot{\varepsilon}_{mn}$$

相关塑性流动

- 切线刚度：

$$E_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} E_{ijkl} & \dot{\lambda} = 0 \\ E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{st}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial f}{\partial q_n}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量满足主对称性。

相关塑性流动

- 正交流动： $\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma}$
- 塑性流动

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbb{E}_0 : \dot{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}} \\ \dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}} \right) \dot{\epsilon} \end{cases}$$

- 切线刚度：

$$\mathbb{E}^{ep} = \begin{cases} \mathbb{E}_0 & \dot{\lambda} = 0 \\ \mathbb{E}_0 - \frac{(\mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \sigma}) \otimes (\mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \sigma})}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量满足主对称性。

非相关塑性流动

- 非正交流动： $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}}$
- 令： $\dot{q}_i = -\dot{\lambda} h_i \rightarrow -\dot{\lambda} H_{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_j}$
- 塑性流动

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \dot{\varepsilon}_{mn}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_n}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_n}} \dot{\varepsilon}_{mn}$$

非相关塑性流动

- 切线刚度：

$$E_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} E_{ijkl} & \dot{\lambda} = 0 \\ E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{st}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_n}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量不满足主对称性。

非相关塑性流动

- 非正交流动： $\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
- 塑性流动

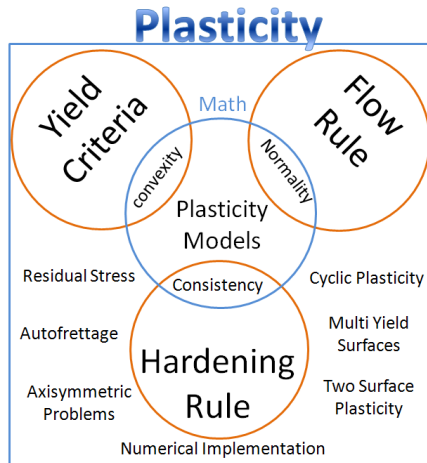
$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \dot{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}} \\ \dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}} \right) \dot{\epsilon} \end{cases}$$

- 切线刚度

$$\mathbb{E}^{ep} = \begin{cases} \mathbb{E}_0 & \dot{\lambda} = 0 \\ \mathbb{E}_0 - \frac{(\mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}})}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量不再满足主对称性。

塑性理论总结



实用弹塑性模型

Prandtl-Reuss 模型

Prandtl(1924) 和 Reuss(1930) 对材料的塑性流动给出了如下基本假定：

- 塑性应变增量与当前应力的主轴重合；
- 塑性应变增量的偏量与偏应力张量成比例；
- 无体积塑性应变发生。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p = \dot{\lambda} s_{ij}$$

可以证明：上述模型与基于 Mises 屈服准则和正交流动法则建立的塑性模型等价。

Prandtl-Reuss 模型

Mises 屈服准则表达式为：

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = \sqrt{J_2} - q(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} - q(\alpha) = 0$$

相关塑性流动：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

对于偏微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \sqrt{\frac{1}{2} s_{mn} s_{mn}}}{\partial s_{pq}} \frac{\partial s_{pq}}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= \frac{s_{pq}}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial (\sigma_{pq} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{pq})}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{pq}}{2\sqrt{J_2}} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{ki} \delta_{kj} \delta_{pq}) = \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \end{aligned}$$

Prandtl-Reuss 模型

- 体积塑性应变率

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p \delta_{ij} = \dot{\lambda} \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \delta_{ij} = 0$$

- 塑性应变偏量率

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \delta_{ij} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} s_{ij}$$

与 Prandtl-Reuss Model 等价！

- 应力应变关系

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p)$$

理想弹塑性模型

- 理想弹塑性模型

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - q = 0$$

- 一致性条件

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{s_{kl}}{2\sqrt{J_2}}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} = \frac{s_{ij} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{s_{ij} E_{ijkl} s_{kl}}$$

理想弹塑性模型

- 其中

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

- 所以

$$s_{ij} E_{ijkl} = s_{ij} [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] = 2\mu s_{kl}$$

$$s_{ij} E_{ijkl} s_{kl} = 2\mu s_{kl} s_{kl}$$

- 令等效单轴塑性应力

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

理想弹塑性模型

- 塑性因子

$$\frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} = \frac{s_{ij}E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}}{s_{ij}E_{ijkl}s_{kl}} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}{\sigma_y^2} = \frac{\mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\|\mathbf{s}\|^2}$$

- 塑性应变

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}{\sigma_y^2} s_{ij}$$

- 应力增量

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{3}{2} \frac{s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}{\sigma_y^2} s_{kl}) = E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{3}{2} \frac{s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}{\sigma_y^2} E_{ijkl}s_{kl} \\ &= E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{3}{2} \frac{s_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}{\sigma_y^2} 2Gs_{ij} = (E_{ijkl} - 2G \frac{3}{2} \frac{s_{ij}s_{kl}}{\sigma_y^2}) \dot{\epsilon}_{kl} \end{aligned}$$

塑性发展导致各向异性！

理想弹塑性模型

- 应力增量

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p)$$

- 球应力增量

$$\dot{\sigma}_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ij}E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \Rightarrow \dot{p} = K\dot{\epsilon}_v$$

- 偏应力增量

$$\begin{aligned}\dot{s}_{ij} &= 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) = 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}}s_{ij}) \\ &= 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{3}{2}\frac{s_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}{\sigma_y^2}s_{ij}) = 2G(1 - \frac{3}{2}\frac{s_{ij}s_{kl}}{\sigma_y^2})\dot{\epsilon}_{ij}\end{aligned}$$

对于某些简单的应力状态，上述方程可能有解析解！

各向同性强化模型

- 屈服函数

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = \sqrt{J_2} - q(\alpha) = 0$$

- 塑性变量

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} \sqrt{\frac{2}{3} s_{ij} s_{ij}} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} \frac{2}{3} \sigma_y$$

- 一致条件

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{dq}{d\alpha} \dot{\alpha} = \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) - q' \dot{\alpha} = 0$$

$$2G \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \dot{\epsilon}_{ij} - 2G \dot{\lambda} s_{ij} \frac{s_{ij}}{4J_2} - q' \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} \frac{2}{3} \sigma_y = 0$$

各向同性强化模型

- 塑性因子

$$\frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \frac{2Gs_{ij}\dot{e}_{ij}}{2G\frac{s_{ij}s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + q'\frac{2}{3}\sigma_y} = \frac{s_{ij}\dot{e}_{ij}}{2J_2(1 + \frac{q'}{\sqrt{3}G})}$$

- 以等效应力和等效应变表示屈服函数

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = \sqrt{J_2} - q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_y - q(\alpha) = 0$$

求导

$$\frac{\dot{\sigma}_y}{\dot{\alpha}} = \sqrt{3}q' \rightarrow H$$

硬化模量 H 在一维和 multidimensional 塑性演化过程中具有一致性！

各向同性强化模型

- 塑性因子

$$\frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} = \frac{s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}{2J_2(1 + \frac{H}{3G})}$$

- 塑性应变率

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}} s_{ij} = \frac{s_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}}{2J_2(1 + \frac{H}{3G})} s_{ij}$$

- 应力增量

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = \left[E_{ijkl} - 2G \frac{2s_{ij}s_{kl}}{3\sigma_y^2(1 + \frac{H}{3G})} \right] \dot{\epsilon}_{kl}$$

各向同性强化模型

- 应力增量

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p)$$

- 球应力增量

$$\dot{\sigma}_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ij}E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \Rightarrow \dot{p} = K\dot{\epsilon}_v$$

- 偏应力增量

$$\begin{aligned}\dot{s}_{ij} &= 2G(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^p) = 2G(\dot{e}_{ij} - \frac{\dot{\lambda}}{2\sqrt{J_2}}s_{ij}) \\ &= 2G\left[1 - \frac{3}{2}\frac{s_{ij}s_{kl}}{\sigma_y^2(1 + \frac{H}{3G})}\right]\dot{e}_{ij}\end{aligned}$$

运动强化模型

- 屈服函数

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = \sqrt{\frac{1}{2}[s_{ij} - \bar{q}(\alpha)][s_{ij} - \bar{q}(\alpha)]} - q = 0$$

请课下思考！

Drucker-Prager 模型

对于岩土、混凝土等材料，体积塑性变形不可忽略。

- Prager 认为塑性变形可以引起体积的变化。

$$\dot{\varepsilon}_v^p \neq 0$$

- 在屈服函数中引入球应力的影响，基于 Drucker-Prager 屈服准则和正交流动法可建立相应的塑性模型。

Drucker-Prager 模型

- 屈服准则表达式为：

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = \alpha_p I_1 + \sqrt{J_2} - q(\alpha) = \alpha_p \sigma_{ij} \delta_{ij} + \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} - q(\alpha) = 0$$

- 相关塑性流动：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

- 对于偏微分

$$\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha_p \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha_p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}}$$

Drucker-Prager 模型

- 塑性应变率

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \alpha_p \delta_{ij} + \dot{\lambda} \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}}$$

- 体积塑性应变

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p \delta_{ij} = 3\alpha_p \dot{\lambda}$$

- 塑性偏应变

$$\dot{e}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^p \delta_{ij} = \dot{\lambda} \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}}$$

体积塑性应变恒为正，而塑性因子又与偏应力有关，这种与剪切应力有关的体积膨胀效应称为“剪胀效应”，是混凝土、岩土等材料本构关系建模的难点。

理想弹塑性模型

- 理想弹塑性模型

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha_p I_1 + \sqrt{J_2} - q = 0$$

- 一致性条件

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p)$$

$$= (\alpha_p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}}) E_{ijkl} [\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v \delta_{kl} + \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} (\alpha_p \delta_{kl} + \frac{s_{kl}}{2\sqrt{J_2}})] = 0$$

理想弹塑性模型

- 定义:

$$H_{kl} = (\alpha_p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}}) E_{ijkl} = 3K\alpha_p \delta_{kl} + G \frac{s_{kl}}{\sqrt{J_2}}$$

- 进一步有：

$$H_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} = H_{kl} (\frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v \delta_{kl} + \dot{e}_{kl}) = 3K\alpha_p \dot{\epsilon}_v + G \frac{s_{kl}}{\sqrt{J_2}} \dot{e}_{kl}$$

$$H_{kl} (\alpha_p \delta_{kl} + \frac{s_{kl}}{2\sqrt{J_2}}) = 9K\alpha_p^2 + G$$

理想弹塑性模型

- 代入一致条件，可解得塑性因子：

$$\dot{\lambda} = \frac{H_{pq}\dot{\epsilon}_{pq}}{9K\alpha_p^2 + G} = \frac{1}{9K\alpha_p^2 + G} \left(K\alpha_p\dot{\epsilon}_v + G\frac{s_{kl}}{\sqrt{J_2}}\dot{\epsilon}_{kl} \right)$$

- 塑性应变率

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}\alpha_p\delta_{ij} + \dot{\lambda}\frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} = \frac{H_{pq}\dot{\epsilon}_{pq}}{9K\alpha_p^2 + G} \left(\alpha_p\delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) \\ &= \frac{1}{9K\alpha_p^2 + G} \left(3K\alpha_p\dot{\epsilon}_v + G\frac{s_{kl}}{\sqrt{J_2}}\dot{\epsilon}_{kl} \right) \left(\alpha_p\delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) \end{aligned}$$

理想弹塑性模型

• 应力增量

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \\
 &= E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{H_{pq}\dot{\epsilon}_{pq}E_{ijkl}}{9K\alpha_p^2 + G} \left(\alpha_p\delta_{kl} + \frac{s_{kl}}{2\sqrt{J_2}} \right) \\
 &= E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{H_{pq}\dot{\epsilon}_{pq}H_{ij}}{9K\alpha_p^2 + G} \\
 &= \left(E_{ijkl} - \frac{H_{kl}H_{ij}}{9K\alpha_p^2 + G} \right) \dot{\epsilon}_{kl}
 \end{aligned}$$

各向同性硬化模型

- 各向同性硬化模型

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha_p I_1 + \sqrt{J_2} - q(\alpha) = 0$$

- 一致性条件

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) - q' \dot{\alpha}$$

$$= H_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} (9K\alpha_p^2 + G) - \dot{\lambda} q' \sqrt{\frac{2}{3} \left(\alpha_p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) \left(\alpha_p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right)}$$

$$= H_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} (9K\alpha_p^2 + G) - \dot{\lambda} q' \sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}} = 0$$

各向同性硬化模型

● 塑性因子

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{1}{9K\alpha_p^2 + G + q' \sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}}} H_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \\ &= \frac{1}{9K\alpha_p^2 + G + q' \sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}}} \left(3K\alpha_p \dot{\epsilon}_v + G \frac{s_{kl}}{\sqrt{J_2}} \dot{\epsilon}_{kl} \right)\end{aligned}$$

● 塑性应变率

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \alpha_p \delta_{ij} + \dot{\lambda} \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} = \frac{H_{pq} \dot{\epsilon}_{pq}}{9K\alpha_p^2 + G + q' \sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}}} \left(\alpha_p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) \\ &= \frac{1}{9K\alpha_p^2 + G + q' \sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}}} \left(3K\alpha_p \dot{\epsilon}_v + G \frac{s_{kl}}{\sqrt{J_2}} \dot{\epsilon}_{kl} \right) \left(\alpha_p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right)\end{aligned}$$

各向同性硬化模型

• 应力增量

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \\
 &= E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{H_{pq}\dot{\epsilon}_{pq}E_{ijkl}}{9K\alpha_p^2 + G + q'\sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}}} \left(\alpha_p\delta_{kl} + \frac{s_{kl}}{2\sqrt{J_2}} \right) \\
 &= E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{H_{pq}\dot{\epsilon}_{pq}H_{ij}}{9K\alpha_p^2 + G + q'\sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}}} \\
 &= \left(E_{ijkl} - \frac{H_{kl}H_{ij}}{9K\alpha_p^2 + G + q'\sqrt{2\alpha_p^2 + \frac{1}{3}}} \right) \dot{\epsilon}_{kl}
 \end{aligned}$$

非相关流动

- 屈服函数 (Lee and Fenves 1998, Lubliner et. al. 1989)

$$f(\sigma_{ij}, \alpha) = \alpha_p I_1 + \sqrt{3J_2} + \beta < \sigma_{i,max} > - (1 - \alpha_p) q(\alpha) = 0$$

- 流动势函数

$$\tilde{f}(\sigma_{ij}) = \alpha_p I_1 + \sqrt{3J_2}$$

请课下思考！

弹塑性理论数值算法初步

参考书

- Juan C. Simo and Thomas R.J. Hughes. 1997, Computational Inelasticity. Springer, New York.
- Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran. 2000. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons.

微分方程数值算法

- 考虑如下微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(x(t)), & t \in [0, T] \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

其中速度 $a(x)$ 的函数关系已知

- 将时间 $[0, T]$ 离散, 考虑时间增量步 $[t_n, t_{n+1}]$, 已知 t_n 时刻的状态量 $x(t_n) = x_n$, 求 t_{n+1} 时刻的状态量 x_{n+1} .
- 利用微分中值定理

$$a(x_{n+\vartheta}) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$$

微分方程数值算法

最终可得如下一阶微分方程数值算法公式：

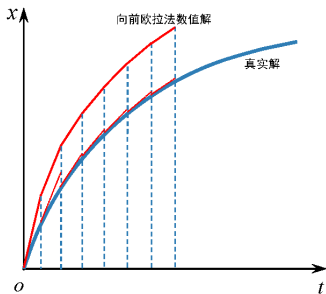
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a(x_{n+\vartheta})\Delta t \\ x_{n+\vartheta} = (1 - \vartheta)x_n + \vartheta x_{n+1} \end{cases}$$

- 取 $\vartheta = 0$, 为前进欧拉算法： $x_{n+1} = x_n + a(x_n)\Delta t$
- 取 $\vartheta = \frac{1}{2}$, 为中心点法： $x_{n+1} = x_n + a(\frac{x_n+x_{n+1}}{2})\Delta t$
- 取 $\vartheta = 1$, 为后退欧拉法： $x_{n+1} = x_n + a(x_{n+1})\Delta t$

微分方程数值算法

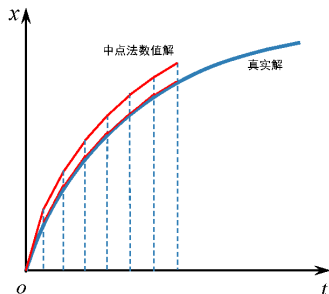
前进欧拉算法

$$x_{n+1} = x_n + a(x_n)\Delta t$$



中心点法

$$x_{n+1} = x_n + a\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)\Delta t$$



微分方程数值算法

后退欧拉法：

$$x_{n+1} = x_n + a(\mathbf{x}_{n+1})\Delta t$$

- 将微分方程转化成了代数方程；
- 求解依赖于未知量 x_{n+1} ，所以称为完全隐式积分方法；
- 依赖非线性方程数值求解方法（最常用的为牛顿方法），一般而言需要迭代；
- 向后欧拉方法同样具有一阶收敛精度，但其数值误差不会累积、即是无条件稳定的；
- 在非线性应力—应变关系的数值求解中得到了非常广泛的应用。

牛顿方法

- 不失一般性，考虑非线性方程

$$f(x) = 0$$

- 对其进行 Taylor 级数展开并略去二阶以上项（即所谓线性化），可以给出如下迭代格式

$$f^{(k)} + \left(\frac{df}{dx} \right)^{(k)} \delta x = 0, \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x$$

- 式中， δx 为第 k 次迭代结束时 x 的增量，即

$$\delta x = - \left[\left(\frac{df}{dx} \right)^{(k)} \right]^{-1} f^{(k)}$$

一维弹塑性本构关系基本方程

- 一维本构关系

$$\sigma = E_0 \varepsilon^e = E_0 (\varepsilon - \varepsilon^p)$$

- 一维塑性演化

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma) \\ \dot{\kappa} = \dot{\lambda} \\ \sigma = E_0 (\varepsilon - \varepsilon^p) \\ F = |\sigma| - (\sigma_Y + E_p \kappa) \leq 0 \end{cases}$$

塑性演化的求解

考虑 $t \in [0, T]$ 时间段内某一时间增量步 $[t_n, t_{n+1}]$ ，时间增量步长为 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ，其中， t_n 时刻对应的应变 ε_n 已知。此时，利用增量应变加载的方式求应力—应变数值解的问题转化为：在已知状态变量 $(\sigma_n, \varepsilon_n^p, \kappa_n)$ 和应变增量 $\Delta \varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ 的条件下，求取 t_{n+1} 时刻的状态变量 $(\sigma_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1})$ 。采用向后欧拉方法可将改写为如下非线性方程组：

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma) \\ \dot{\kappa} = \dot{\lambda} \\ \sigma = E_0(\varepsilon - \varepsilon^p) \\ F = |\sigma| - (\sigma_Y + E_p \kappa) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta \lambda \\ \sigma_{n+1} = E_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ F_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - (\sigma_Y + E_p \kappa) \leq 0 \end{cases}$$

弹性预测

- 首先假定在增量步 $[t_n, t_{n+1}]$ 中没有塑性演化，从而按弹性预测的状态变量为：

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1}^{p, \text{trial}} = \varepsilon_n^p \\ \kappa_{n+1}^{\text{trial}} = \kappa_n \\ \sigma_{n+1}^{\text{trial}} = E_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p, \text{trial}}) \\ F_{n+1}^{\text{trial}} = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - (\sigma_Y + E_p \kappa_{n+1}^{\text{trial}}) \leq 0 \end{cases}$$

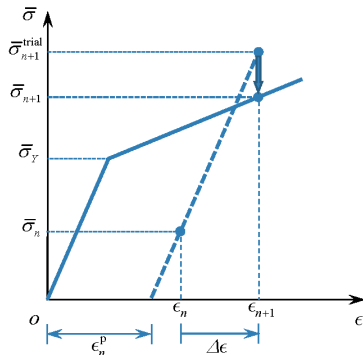
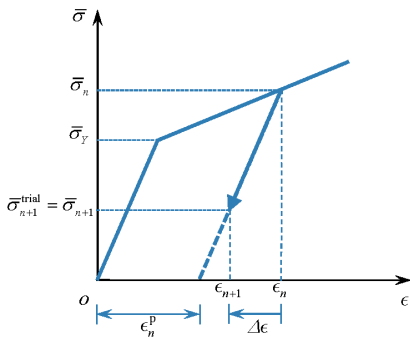
- 进而进行（弹性或塑性）状态判断

$$\begin{cases} F_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 & \text{弹性 (加) 卸载状态} \\ F_{n+1}^{\text{trial}} > 0 & \text{塑性加载状态} \end{cases}$$

(弹性或塑性) 状态判断

$$\begin{cases} F_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 & \text{弹性 (加) 卸载状态} \\ F_{n+1}^{\text{trial}} > 0 & \text{塑性加载状态} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\cdot)_{n+1} &= (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}} && \text{本步结束} \\ F_{n+1} &= 0, \Delta\lambda > 0 && \text{塑性求解} \end{aligned}$$



塑性修正

将非线性方程组

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) \\ \kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\lambda \\ \sigma_{n+1} = E_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ F_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - (\sigma_Y + E_p\kappa) \leq 0 \end{cases}$$

改写为残量形式

$$\begin{cases} r_{n+1}^p = -\varepsilon_{n+1}^p + \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}) = 0 \\ F_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - (\sigma_Y + E_p\kappa_{n+1}^{\text{trial}} + E_p\Delta\lambda) = 0 \end{cases}$$

并有应力

$$\sigma_{n+1} = E_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) - E_0\Delta\varepsilon^p = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - E_0\Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1})$$

塑性修正

对有应力表达式采用等式 $x = |x|\text{sign}(x)$ 化简，可得

$$|\sigma_{n+1}|\text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|\text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) - E_0\Delta\lambda\text{sign}(\sigma_{n+1})$$

即

$$\left(|\sigma_{n+1}| + E_0\Delta\lambda\right)\text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}|\text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}})$$

可得

$$\begin{cases} \text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \\ |\sigma_{n+1}| + E_0\Delta\lambda = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| \end{cases}$$

塑性修正

代入屈服条件

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - (\sigma_Y + E_p \kappa_{n+1}^{\text{trial}} + E_p \Delta\lambda) \\ &= |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - E_0 \Delta\lambda - (\sigma_Y + E_p \kappa_{n+1}^{\text{trial}} + E_p \Delta\lambda) = 0 \end{aligned}$$

可解得

$$\Delta\lambda = \frac{|\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - (\sigma_Y + E_p \kappa_{n+1}^{\text{trial}})}{E_0 + E_p} = \frac{f_{n+1}^{\text{trial}}}{E_0 + E_p}$$

状态变量求解

- 进而可解得 t_n 时刻的状态变量 $(\sigma_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1})$

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}) \\ \kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\lambda \\ \sigma_{n+1} = E_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \end{cases}$$

多维弹塑性（等向强化）本构关系基本方程

- 多维本构关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

- 多维塑性演化（等向强化）

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \\ F = f(\boldsymbol{\sigma}) - \sqrt{\frac{2}{3}} R(\kappa) \leq 0 \end{cases}$$

- 对于 von Mises 屈服准则

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}))^2} = \sqrt{\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}}$$

多维本构关系数值算法

- 已知：上一个时刻 t_n 的应变 ϵ_n 、基本状态变量 $\sigma_n, \epsilon_n^p, \kappa_n$
- 给定：应变增量 $\Delta\epsilon$
- 求： t_{n+1} 时刻的状态变量 $\sigma_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1}$
- 弹性预测 → 塑性修正

弹性预测

冻结塑性演化，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p,trial}}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p,trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}} \\ \kappa_{n+1}^{\text{trial}} = \kappa_n \end{cases}$$

状态判断

$$F_{n+1}^{\text{trial}} = F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \kappa_{n+1}^{\text{trial}}) \begin{cases} < 0 & (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}} \text{ 本步结束} \\ \geq 0 & F_{n+1} = 0, \Delta\lambda > 0 \text{ 塑性求解} \end{cases}$$

塑性修正

采用后退欧拉方法改写塑性演化方程

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n + \Delta\lambda \Gamma_{n+1} \\ \kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\lambda H_{n+1} \end{cases}$$

塑性应变流动方向矢量 Γ_{n+1} 和硬化模量 H_{n+1} 分别记为

$$\begin{cases} \Gamma_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \\ H_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{n+1}} \end{cases}$$

经过塑性修正后的状态变量为 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \epsilon_{n+1}^p, \kappa_{n+1}$

塑性修正

与屈服条件、应力方程结合，形成塑性空间封闭方程组

$$\begin{cases} \epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \Delta\lambda \Gamma_{n+1} \\ \kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\lambda H_{n+1} \\ \sigma_{n+1} = \mathbb{E}_0 : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^p) \\ F_{n+1} = F(\sigma_{n+1}, \kappa_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

对应力表达式进一步变形

$$\sigma_{n+1} = \mathbb{E}_0 : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^p) - \mathbb{E}_0 : \Delta\epsilon^p = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} - \mathbb{E}_0 : \Delta\epsilon^p$$

塑性求解

- 考虑 von Mises 屈服准则各项同性强化，有

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}} = \mathbf{n}(\mathbf{s}) \quad H = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- 偏应力与偏应变

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}$$

- Prandtl-Reuss 关系

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{3}(\text{tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = K(\text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad \dot{\mathbf{s}} = 2G(\mathbf{I} - \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \dot{\mathbf{e}}, \quad \gamma = \frac{1}{1 + \frac{E_p}{3G}}$$

塑性求解

• 线性预测

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{s}_n + 2G\Delta\mathbf{e}_n, \quad \kappa_{n+1}^{\text{trial}} = \kappa_n$$

状态判断

$$F_{n+1}^{\text{trial}} = F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \kappa_{n+1}^{\text{trial}}) \begin{cases} < 0 & (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{\text{trial}} \text{ 本步结束} \\ \geq 0 & F_{n+1} = 0, \Delta\lambda > 0 \text{ 塑性求解} \end{cases}$$

• 塑性演化

$$\dot{\mathbf{s}} = 2G(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \rightarrow \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n = 2G(\Delta\mathbf{e} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2G\Delta\lambda\mathbf{n}_{n+1} \rightarrow \mathbf{n}_{n+1} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\sqrt{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} : \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}} = \frac{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}{\sqrt{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} : \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}}}$$

塑性求解

- 对屈服条件进行摄动，构造牛顿迭代格式 $F_{n+1} + \delta F_{n+1} = 0$

$$\begin{aligned}\delta F_{n+1} &= \left. \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} : \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \left. \frac{\partial F}{\partial \kappa} \right|_{n+1} \delta \kappa_{n+1} \\ &= \mathbf{n}_{n+1} : \delta \mathbf{s}_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} R'_{n+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \delta \lambda_{n+1}\end{aligned}$$

其中

$$\delta \mathbf{s}_{n+1} = \delta(\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2G\Delta\lambda \mathbf{n}_{n+1}) = -2G\mathbf{n}_{n+1} \delta \lambda_{n+1}$$

- 可得

$$\delta F_{n+1} = -2G \left(1 + \frac{R'_{n+1}}{3G} \right) \delta \lambda_{n+1}$$

塑性求解

- 进而得的关于 $\delta\lambda_{n+1}$ 的线性方程

$$F_{n+1} + \delta F_{n+1} = F_{n+1} - 2G \left(1 + \frac{R'_{n+1}}{3G} \right) \delta\lambda_{n+1} = 0$$

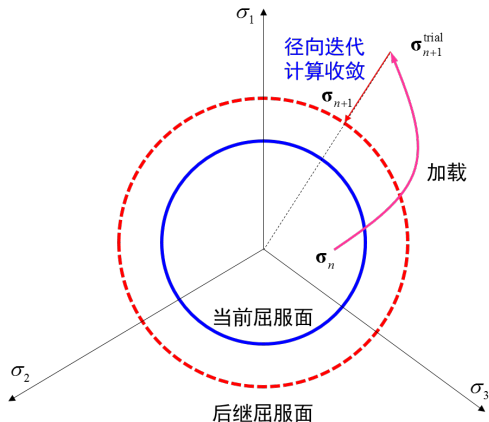
- Newton 迭代过程

$$\delta\lambda_{n+1}^k = \frac{F_{n+1}^k}{2G \left(1 + \frac{R'^k_{n+1}}{3G} \right)}, \quad \lambda_{n+1}^{k+1} = \lambda_{n+1}^k + \delta\lambda_{n+1}^k$$

- 迭代收敛以后，求各个状态变量

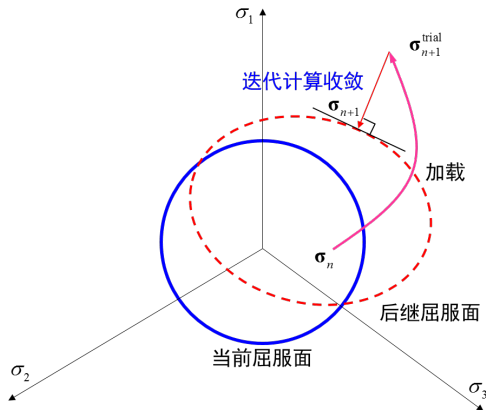
$$\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \mathbf{n}_{n+1}, \quad \sigma_{n+1} = \mathbb{E}_0 : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^p)$$

塑性求解



von Mises 各向同性硬化塑性理论的回映算法

塑性求解



一般塑性理论的回映算法

切线刚度

- 材料切线刚度

$$\mathbb{E}^{\text{tan}} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right|_{n+1}$$

- 算法一致刚度

$$\mathbb{E}_{\text{alg}}^{\text{tan}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}}$$

- 二者各表示什么意义？二者是否相等？
- 如果不相等，如何选取？

切线刚度

- 回到最简单的情况

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(x(t)) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}, \quad x_{n+1} = x_n + a(x_{n+1})(t_{n+1} - t_n)$$

- (材料) 切线刚度

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{n+1} = a(x_{n+1})$$

切线刚度

- 回到最简单的情况

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(x(t)) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}, \quad x_{n+1} = x_n + a(x_{n+1})(t_{n+1} - t_n)$$

- 算法一致刚度

$$\begin{aligned} dx_{n+1} &= \left. \frac{da}{dx} \right|_{n+1} \Delta t dx_{n+1} + a(x_{n+1}) dt_{n+1} \\ \Rightarrow \left(1 - \left. \frac{da}{dx} \right|_{n+1} \Delta t \right) \frac{dx_{n+1}}{dt_{n+1}} &= a(x_{n+1}) \end{aligned}$$

- 与（材料）切向刚度不相等，且

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad \frac{dx_{n+1}}{dt_{n+1}} \rightarrow \left. \frac{dx}{dt} \right|_{n+1}$$

切线刚度

- 材料切线刚度与算法切线刚度不一致的来源？
- 离散系统（后退欧拉系统）逼近连续系统（微分系统）产生的误差
- 如何选取？
 - 为什么要使用刚度？
 - 用于结构层次非线性方程的迭代求解
 - 为什么要使用切线刚度？
 - 基于切线刚度可以达到二阶收敛速度
 - 数值计算过程中采用的是离散系统还是连续系统？
 - 离散系统！
- 结论：多数时候应采用算法一致刚度，算法一致刚度是“将错就错”的结果！
- 具体推导请自学 Simo 的专著的相关章节

作业题

作业题

- 一根圆形截面细杆，已知：
 - 长度为 L ，半径为 R ；
 - 构成材料为理想弹塑性材料，弹性模量 E ，泊松比 ν ，屈服强度为 f_y ，服从 von Mises 屈服准则；
 - 首先轴向拉伸细杆，使其全长全截面轴向应力均达到 f_y ；
 - 然后杆的两个端截面相对旋转一个小角度 θ ，假定扭转变形沿着杆的轴向均匀分布，同时杆的任意横截面在旋转过程中均保持平面。

作业题

- 问：
 - 如何不经过计算，即判断杆的轴向应力在旋转变形过程中是变大还是变小？
 - 推导上述变形之后，轴向应力与剪应力沿杆截面分布的解析表达式。
 - 自拟一组参数（建议采用钢材的材料参数，钢材强度等级自定），进行上述问题的有限元分析（软件不限），比较理论结果与计算结果，讨论二者的区别与联系。
 - 其它条件不变，将材料考虑为各向同性线性硬化材料，硬化模量取为 $K = 0.05E$ ，再进行有限元分析，根据计算结果讨论理想弹塑性材料与弹塑性硬化材料的区别。
 - 如果改为 D-P 塑性模型，结果将会怎样？

概述
弹塑性理论
实用弹塑性模型
弹塑性理论数值算法初步

微分方程数值算法
一维本构关系数值算法
多维本构关系数值算法
一致刚度

结束

