第四讲：弹性力学平面问题直角坐标解答

弹塑性力学研究生核心课程

任晓丹

同济大学建筑工程系
www.renxiaodan.com

October 29, 2017

本节主要内容

1. 直角坐标系下平面问题定义
2. 平面应力问题的应力函数
3. 平面应力问题直角坐标解法

弹性力学基本方程

- 平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$$

- 协调方程

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk.il} - \varepsilon_{il.jk} + \varepsilon_{jl.ik} = 0$$

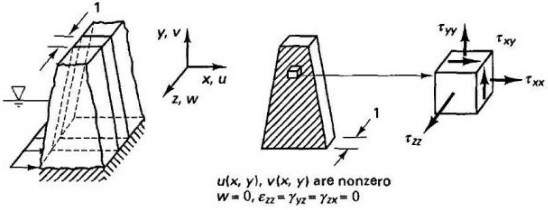
- 本构方程

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} : \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = 3K\left(\tfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) + 2G\left(\varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) = \lambda\ \varepsilon_{kk}\ \delta_{ij} + 2\mu\ \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{E}(\sigma_{ij} - \nu[\sigma_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ij}])$$

平面应变问题



- 位移场

$$u = u(x, y) \ , \ \ v = v(x, y) \ , \ \ w = 0$$

- 应变场

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \ \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_z = 0 \ , \ \ \varepsilon_{xz} = 0 \ , \ \ \varepsilon_{yz} = 0$$

平面应变问题

- 考虑广义胡克定律

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \ , \ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \ , \ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \ , \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \end{cases}$$

- 平面应变场

$$\varepsilon_z = 0 \ , \ \varepsilon_{xz} = 0 \ , \ \varepsilon_{yz} = 0$$

- 可得

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \ , \ \varepsilon_{yz} = 0 \ , \ \varepsilon_{zx} = 0$$

平面应变问题

- 平面应变问题广义胡克定律

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1\sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \end{cases}$$

- 其中

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\ ,\ \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}\ ,\ \frac{E_1}{1+\nu_1} = \frac{E}{1+\nu}$$

将平面应变问题（$\sigma_z \neq 0$）转化为三个平面应力分量表示的应力应变关系。

平面应变问题

- 平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

- 平面应变问题平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

平面应变问题

- 协调方程

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk.il} - \varepsilon_{il.jk} + \varepsilon_{jl.ik} = 0$$

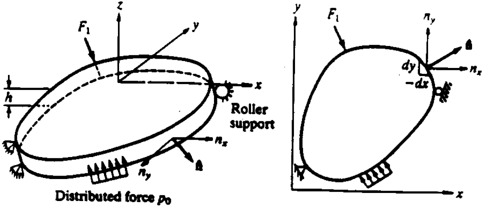
- 对于平面应变问题

$$i, j, k, l = (1, 2)$$

- 只有

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

平面应力问题



- 应力场：$\sigma_z = 0$，$\tau_{xz} = 0$，$\tau_{yz} = 0$ 当 $x = \pm h/2$
- 一般的，当厚度 h 不太大，近似认为:

$$\begin{cases} \sigma_z = 0\text{，}\tau_{xz} = 0\text{，}\tau_{yz} = 0 \\ \sigma_x\text{，}\sigma_x\text{，}\tau_{xy} \quad \text{均为}(x, y)\text{的函数} \end{cases}$$

平面应力问题

- 考虑广义胡克定律

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \ , \ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \ , \ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \ , \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \end{cases}$$

- 平面应力场

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \end{cases}$$

平面应力问题

- 平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

- 平面应力问题平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

平面应力问题

- 协调方程

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk.il} - \varepsilon_{il.jk} + \varepsilon_{jl.ik} = 0$$

- 其中包含：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

对于平面应力问题，当厚度 h 不太大，近似认为其余协调方程均能够满足。

平面问题基本方程

- 平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

- 协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- 应力应变关系

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy} \end{cases}$$

两类平面问题可以通过弹性常数换算的方式直接转化，以下以平面应力问题为例进行讲解。

应力协调方程

- 将应力应变关系和平衡方程代入应变协调方程，可得应力协调方程如下：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)+(1+\nu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)=0$$

- 对于无体力的情况，有

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

- 无体力平衡方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0\end{cases}$$

平衡方程的解

- 无体力平衡方程结合 Green 公式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow \ \sigma_x = \dfrac{\partial P}{\partial y} \ , \ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \ \Rightarrow \ \sigma_y = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \ , \ \tau_{yx} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{cases}$$

- 剪应力方程，再考虑 Green 公式

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial y} \ , \ \ Q = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

ϕ 为 Airy 应力函数

应力函数表示

- 应力的应力函数表示

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\ ,\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\ ,\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

- 应力协调方程表示为应力函数的双调和方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$$

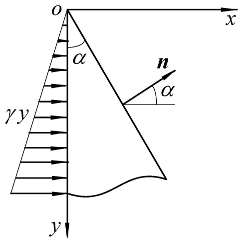
其中 $\nabla^2\nabla^2$ 为双调和算符，弹性力学平面的问题的求解可归结为应力函数的求解。

逆解法

- 直接假设满足双调和方程的应力函数形式的方法。
- 通常将应力函数假设为二维多项式函数，次数小于等于 3。
- 逆解法只能求解非常有限的几类问题。

逆解法

例：楔形水坝问题



将应力函数设为三次齐次多项式，有

$$\phi(x,y) = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2y + \frac{c}{2}xy^2 + \frac{e}{6}y^3$$

逆解法

- 应力表示为:

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = cx + ey \\
\sigma_y = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = ax + by \\
\tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = -bx - cy
\end{cases}
$$

- 边界条件

$$
\begin{cases}
\sigma_x = -\gamma y \ , \ \tau_{xy} = 0 \text{ 当 } \ x = 0 \\
\sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 = 0 \ , \ \tau_{xy} n_1 + \sigma_y n_2 = 0 \text{ 当 } \ x = y \tan\alpha
\end{cases}
$$

其中

$$
n_1 = \cos\alpha \ , \ n_2 = -\sin\alpha
$$

逆解法

- 可解得系数:

$$a = -2\gamma \cot^3 \alpha \ , \ \ b = \gamma \cot^2 \alpha \ , \ \ c = 0 \ , \ \ e = -\gamma$$

- 应力解

$$\begin{cases} \sigma_x = -\gamma y \\ \sigma_y = -2\gamma x \cot^3 \alpha + \gamma y \cot^2 \alpha \\ \tau_{xy} = -\gamma x \cot^2 \alpha \end{cases}$$

半逆解法

猜一部分（应力函数的构成），解一部分（应力函数的表达式）。

- 令双调和方程的解满足：$\phi = g(x)f(y)$
- 代入双调和方程

$$\nabla^2\nabla^2\phi = g''''(x)f(y) + 2g''(x)f''(y) + g(x)f''''(y) = 0$$

- 若 $g(x)$ 为多项式，化为如下常微分方程

$$f''''(y) = 0 \quad \text{or} \quad f''(y) = 0 \quad \text{or} \quad f(y) = 0$$

- 若应力函数是多项式函数与一般函数乘积的线性组合

$$\phi = \sum_i p_i(x)f_i(y)$$

即可利用上述过程求解。

半逆解法

- 继续考虑代双调和方程：

$$\nabla^2\nabla^2\phi = g''''(x)f(y) + 2g''(x)f''(y) + g(x)f''''(y) = 0$$

- 若 $g(x) = \cos\alpha x$ 为三角函数，化为如下四阶常微分方程

$$f''''(y) - 2\alpha^2 f''(y) + \alpha^4 f(y) = 0$$

- 存在如下形式的一般解：

$$f(y) = A_1\cosh\alpha y + A_2\sinh\alpha y + A_3 y\cosh\alpha y + A_4 y\sinh\alpha y$$

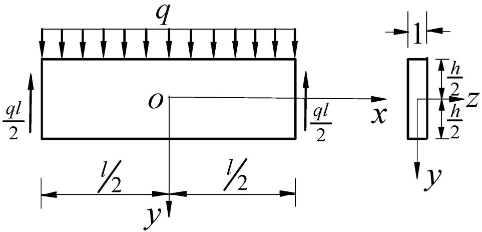
- 若应力函数三角函数与一般函数乘积的线性组合

$$\phi = \sum_i\left[\cos(\alpha_i x)f_i{}^c(y) + \sin(\alpha_i x)f_i{}^s(y)\right]$$

其解为上述一般解的组合。

半逆解法

例：简支梁承受均布荷载



主要边界：

$$\begin{cases} \tau_{xy} = 0 \quad (y = \pm\frac{h}{2}) \\ \sigma_y = 0 \quad (y = \frac{h}{2}) \\ \sigma_y = -q \quad (y = -\frac{h}{2}) \end{cases}$$

次要边界：

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \mathrm{d}y = -\frac{ql}{2} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \mathrm{d}y = 0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y \mathrm{d}y = 0 \end{cases} \quad \left(x = \frac{l}{2}\right)$$

半逆解法

- 认为 σ_y 沿着长度方向不变:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2f(y)$$

- 上式积分，可得应力函数表达式

$$\phi = x^2 f(y) + x f_1(y) + g(y)$$

- 考虑剪应力及其对称性

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2x f'(y) + f'_1(y) = 0 \;\Rightarrow\; f'_1(y) = 0$$

- 应力函数为

$$\phi = x^2 f(y) + g(y)$$

半逆解法

- 应力函数代入双调和方程

$$4f''(y) + g''''(y) + x^2 f''''(y) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''''(y) = 0 \\ 4f''(y) + g''''(y) = 0 \end{cases}$$

- 解上述常微分方程（组）

$$\begin{cases} f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ g = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b^3 y^3 - \frac{1}{3} a_2 y^4 - \frac{1}{5} a_3 y^5 \end{cases}$$

利用（精确、近似）边界条件求出上式各项的系数

谢谢！

可登陆以下个人主页查阅、下载相关资料。
http://www.renxiaodan.com/