

第四讲：混凝土多维受力本构关系

高等混凝土结构研究生核心课程

任晓丹

同济大学建筑工程系
www.renxiaodan.com

March 26, 2020

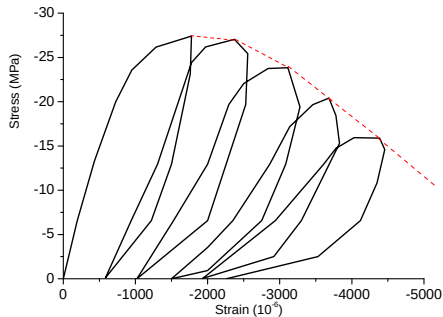
主要内容

- ① 概述
- ② 弹性模型
 - 线弹性模型
 - 非线性弹性模型
- ③ 弹塑性模型
 - 一维弹塑性模型
 - 多维弹塑性模型
 - 屈服函数
 - 强化法则
 - 塑性流动
 - 相关流动与非相关流动
- ④ 损伤力学模型
 - 弹塑性损伤模型简介
 - 实用损伤模型

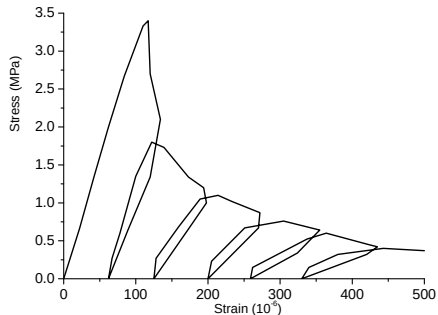
参考书

- Jacob Lubliner. Plastic Theory. 2008, Dover Publication, New York.
- W.F. Chen and D.J. Han. 1988. Plasticity for structural Engineers. Springer-Verlag, New York.
- 陈惠发, 萨里普 (余天庆、王勋文、刘再华译), 2004. 弹性与塑性力学. 中国建筑工业出版社: 北京.
- 李杰, 吴建营, 陈建兵, 2014, 混凝土随机损伤力学. 科学出版社: 北京.
- Juan C. Simo and Thomas R.J. Hughes. 1997, Computational Inelasticity. Springer, New York.

混凝土一维非线性行为



重复加载受压实验



重复加载受拉实验

混凝土二维非线性行为

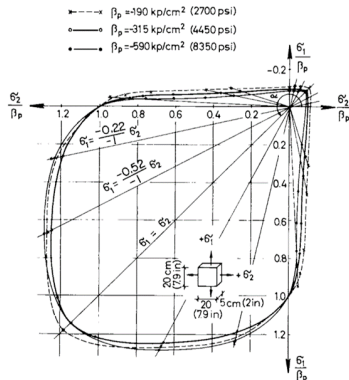
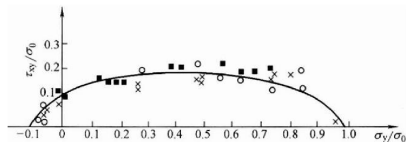
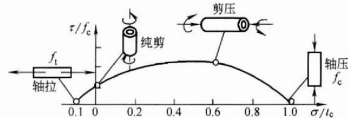


Fig. 6—Biaxial strength of concrete; results of experimental investigation

二维主应力空间强度包络图



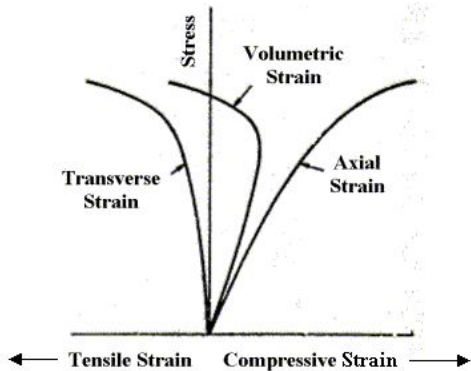
(a)



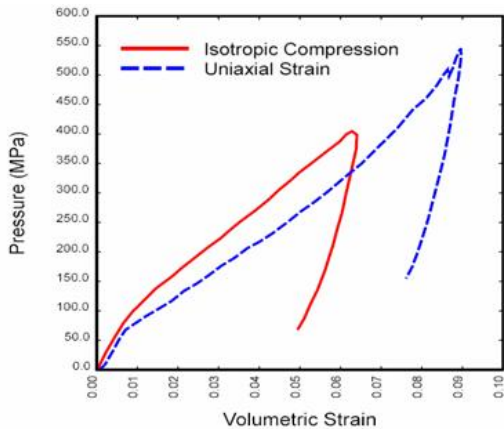
(b)

压剪应力空间强度包络图

混凝土三维非线性行为



单轴受压实验



约束受压实验

弹性本构关系

- 线弹性本构关系

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$$

- 刚度张量的对称性

- 次对称性

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}$$

- 主对称性

$$E_{ijkl} = E_{klij}$$

弹性本构关系

- Voigt notation

s_α	α	1	2	3	4	5	6
s_{ij}	i	1	2	3	1	1	2
	j	1	2	3	2	3	3

- 刚度张量矩阵化

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1123} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2223} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3312} & E_{3313} & E_{3323} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1213} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1223} \\ E_{1311} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1312} & E_{1313} & E_{1323} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2312} & E_{2313} & E_{2323} \end{bmatrix}$$

弹性本构关系

正交各向异性 (Orthotropy) 刚度矩阵

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}$$

正交各向异性应力应变关系

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{12}} & & \\ & \frac{1}{G_{13}} & \\ & & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}$$

弹性本构关系

各向同性 (Isotropy) 应力应变关系

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{kk} = 3K \varepsilon_{kk}, \quad s_{ij} = 2\mu e_{ij}$$

应力应变关系展开表示

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}$$

非线性弹性模型

- 由于混凝土材料性质的本质非线性，采用线弹性本构模型进行结构分析，不能正确地反映结构的内（应）力分布的真实情况，也很难保证结构在极限状态下的安全性。
- 加载时，应力随应变增加呈非线性规律增大，卸载时，沿原路径返回，无残余变形。
- 可以部分反映混凝土的非线性性质，但非线性与路径无关，不能用于循环加载和反复加载时的分析。
- 两种基本形式：**全量式和增量式**

非线性弹性模型

各向同性非线性弹性模型：Ottoosen 模型

- 采用应力、应变的终值建立本构关系
- 采用割线模量
- 仅适用于按比例单调加载

非线性弹性模型

正交各向异性增量模型：Darwin-Pecknold 模型

- 以二维受力情况为例说明。对于正交各向异性材料，可给出二维受力条件下的线弹性本构关系如下

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \\ & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}$$

- 近似取

$$\begin{cases} \nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2 \\ \nu = \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}} \\ (1 - \nu^2)G_{12} = \frac{1}{4}(E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1E_2}) \end{cases}$$

非线性弹性模型

正交各向异性增量模型：Darwin-Pecknold 模型

- 代入、整理

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} \\ \nu\sqrt{E_2E_1} & E_2 \\ & & \frac{1}{4}(E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1E_2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

- 对于非线性材料，应使用增量型方程表示上述本构关系

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_{1r} & \nu\sqrt{E_{1r}E_{2r}} \\ \nu\sqrt{E_{2r}E_{1r}} & E_{2r} \\ & & \frac{1}{4}(E_{1r} + E_{2r} - 2\nu\sqrt{E_{1r}E_{2r}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

式中 E_{1r} 和 E_{2r} 是各自方向的切线模量。

非线性弹性模型

正交各向异性增量模型：Darwin-Pecknold 模型

- 主方向上的应力-应变关系

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E_{1r}} - \nu \frac{d\sigma_2}{E_{2r}}$$

- 令

$$n = \frac{E_{1r}}{E_{2r}}, \quad \alpha = \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}$$

- 可得

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E_{1r}}(1 - \alpha n \nu), \quad d\sigma_1 = E_{1r} \frac{d\varepsilon_1}{1 - \alpha n \nu}$$

非线性弹性模型

正交各向异性增量模型: Darwin-Pecknold 模型

- 定义等效单轴应变

$$\varepsilon_{1u} = \frac{\varepsilon_1}{1 - \alpha n \nu}$$

- 主轴上的应力应变关系可以表达成单轴形式

$$d\sigma_1 = E_{1r} d\varepsilon_{1u}$$

- 二维本构关系可以表达为如下形式解耦表达式:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1r} & & \\ & E_{2r} & \\ & & G_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

非线性弹性模型

正交各向异性增量模型：Darwin-Pecknold 模型

- Darwin 和 Pecknold 提出：可以采用混凝土在单轴受压状态的应力应变曲线作为上述各轴应力应变关系标定参数的依据，单轴受压可取为 Saenz 建议的关系式

$$\sigma = \frac{E_1 \varepsilon}{1 + \left(\frac{E_0}{E_p} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right)^2}$$

- 可得各轴应力应变关系

$$\sigma_i = \frac{E_1 \varepsilon_{iu}}{1 + \left(\frac{E_0}{E_{ip}} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ip}} \right) + \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ip}} \right)^2}, \quad i = 1, 2$$

其中， f_{ic} 和 ε_{ip} 双轴等效强度和等效峰值应变； $E_{ip} = \frac{f_{ic}}{\varepsilon_{ip}}$ 为等效峰值割线刚度。

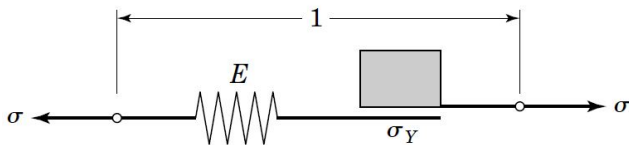
非线性弹性模型

正交各向异性增量模型：Darwin-Pecknold 模型

- 适用于受压为主的多轴应力状态，且应力比变化不宜太大。
- 双轴强度可借助 Kupfer 曲线查得，双轴峰值应变数值较难得到。
- 概念清楚，计算简单，具有理论意义和应用价值。
- 等效应变的概念产生了深远的影响。

对于双轴拉-压应力状态，在剪切破坏分析中经常遇到。加拿大多伦多大学的 Vecchio 和 Collins，以及美国休斯敦大学的 Hsu 和 Mo 做了大量奠基性工作，可参阅论文和专著。

一维弹塑性物理模型



弹簧摩擦元模型

- 应变弹塑性分解

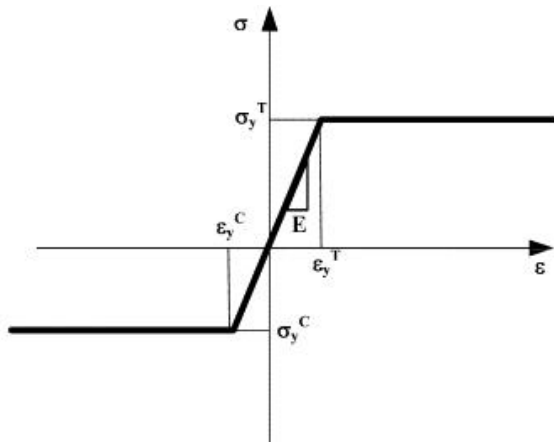
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

- 应力应变关系

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad \dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$$

- 任务：引入 ε^p 的表达式，建立以 σ 、 ε 及、 ε^p 为状态量的闭合的理论体系

一维理想弹塑性模型



理想弹塑性模型

一维理想弹塑性模型

- 屈服函数

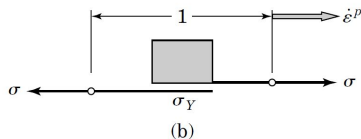
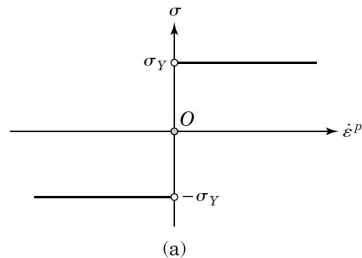
$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y$$

- 弹性阶段

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y < 0, \dot{\varepsilon}^p = 0$$

- 屈服阶段

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_Y = 0, \dot{\varepsilon}^p \neq 0$$



一维理想弹塑性模型

- 塑性演化

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial (|\sigma| - \sigma_Y)}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma)$$
$$\Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} \dot{\lambda} & \sigma = \sigma_Y \\ -\dot{\lambda} & \sigma = -\sigma_Y \end{cases}$$

- 一致性条件

$$f(\sigma) = 0 \Rightarrow \dot{f}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E(\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) = 0$$

- 塑性应变表达式

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) \Rightarrow \dot{\lambda} = \text{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon} \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}$$

线性各向同性硬化模型

- 屈服函数

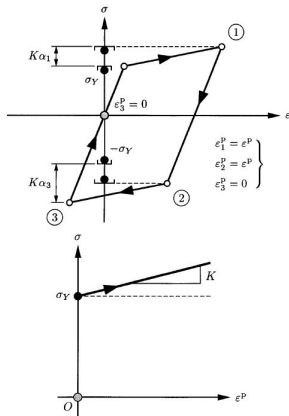
$$f(\sigma) = |\sigma| - q$$

- 硬化法则 (各向同性线性)

$$q = \sigma_Y + K\alpha, \quad \dot{q} = K\dot{\alpha}$$

- 塑性内变量

$$\alpha := \int_T |\dot{\epsilon}^p| dt, \quad \dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^p| \geq 0$$



线性各向同性硬化模型

- 塑性演化

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \operatorname{sign}(\sigma), \quad \dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| = \dot{\lambda}$$

- 一致条件

$$f(\sigma) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{f}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - K \dot{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E (\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) - K \dot{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{E}{E+K} \dot{\varepsilon} \operatorname{sign}(\sigma) \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E+K} \dot{\varepsilon} \end{cases}$$

线性各向同性硬化模型

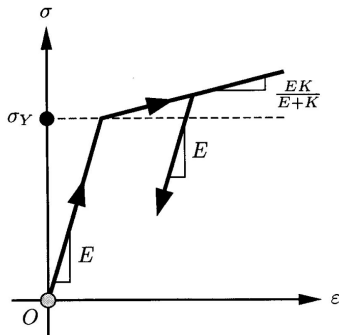
- 增量应力应变关系

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E^{ep}\dot{\varepsilon}$$

- 切线模量

$$E^{ep} = \begin{cases} E & \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{EK}{E+K} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

- 加、卸载 (Kuhn-Tucker) 条件
(同前)



非线性硬化模型

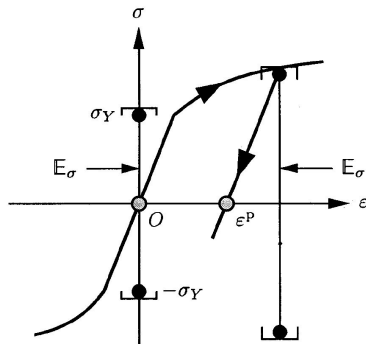
- 屈服条件

$$f(\sigma) = |\sigma| - q$$

- 硬化法则

$$q = q(\alpha), \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \dot{\alpha} := H \dot{\alpha}$$

- 塑性变量 α (同前)



非线性硬化模型

- 塑性演化: $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma)$, $\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| = \dot{\lambda}$
- 一致条件

$$f(\sigma) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{f}(\sigma) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - H \dot{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E (\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) - H \dot{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{E}{E+H} \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) \\ \dot{\varepsilon}^p = \frac{E}{E+H} \dot{\varepsilon} \end{cases}$$

- 增量本构关系

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E^{ep} \dot{\varepsilon}, \quad E^{ep} = \begin{cases} E & \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{EH}{E+H} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

多维弹塑性理论基本公式

- 应变弹塑性分解

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

- 应力应变关系

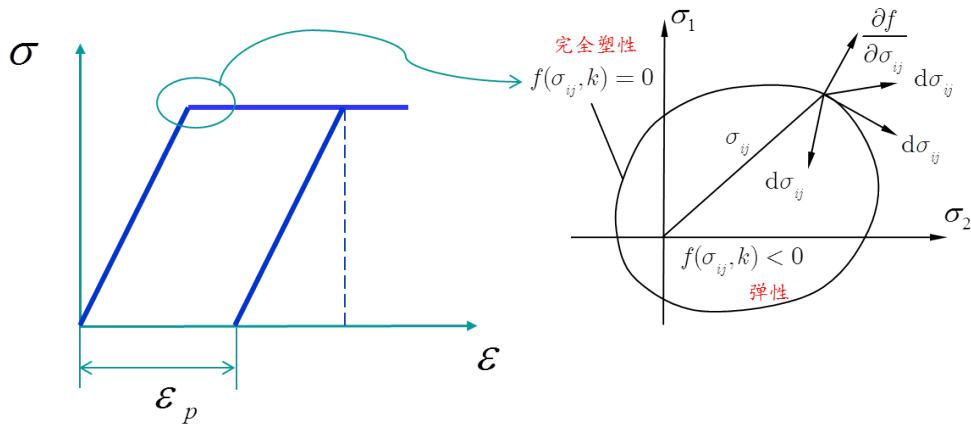
$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p)$$

- 任务:

- 引入 ε_{ij}^p 的表达式, 建立关于状态量 σ_{ij} 、 ε_{ij} 及、 ε_{ij}^p 的闭合理论体系
- 求解 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 、 E_{ijkl}^{ep} , 进而可进行结构非线性分析

屈服函数



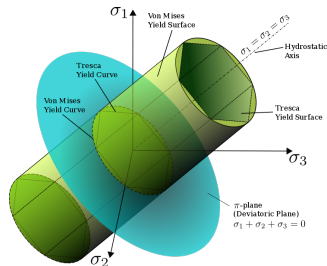
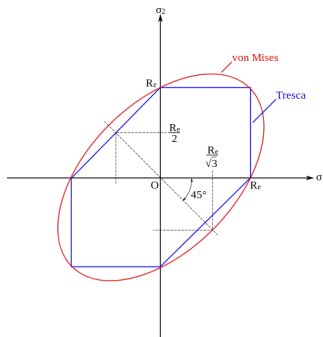
从一维空间的一个点到多维空间的曲面

屈服函数

- Tresca 屈服函数:

$$f = \frac{1}{2} \max_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j|) - q = 0$$

- von Mises 屈服函数: $f = \sqrt{J_2} - q = 0$

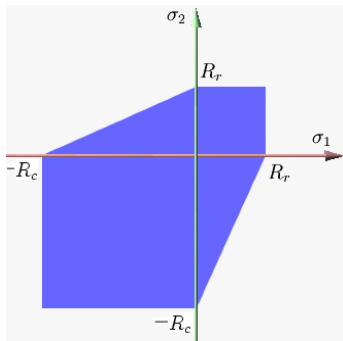
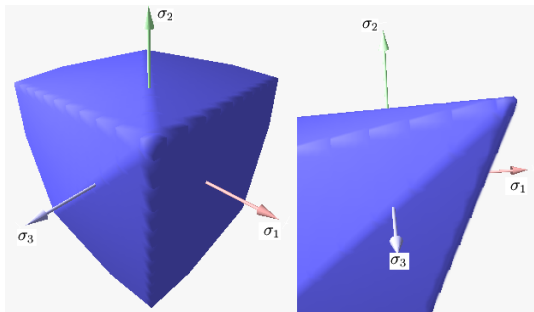


屈服函数

- Mohr-Coulomb 屈服函数:

$$f = \frac{m+1}{2} \max_{i \neq j} (|\sigma_i - \sigma_j| + K(\sigma_i + \sigma_j)) - q_c = 0$$

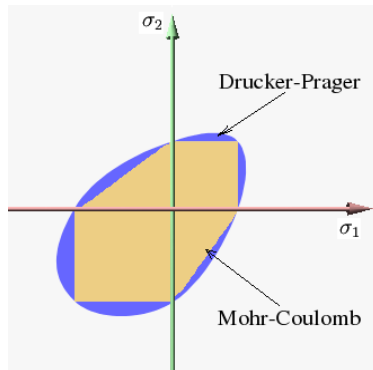
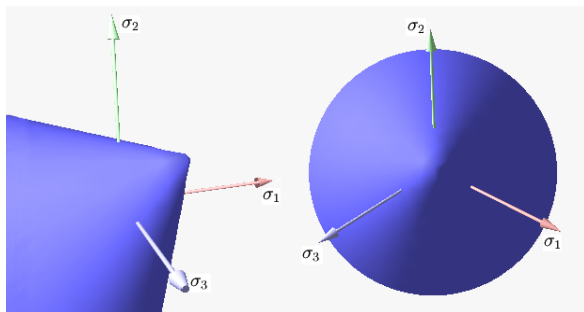
其中, $m = \frac{f_c}{f_t}$, $K = \frac{m-1}{m+1}$



屈服函数

- Drucker-Prager 屈服函数:

$$f = \sqrt{J_2} + BI_1 - q = 0$$



屈服函数

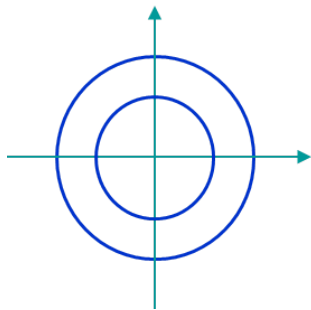
破坏准则	参数数目	原表达式	统一表达式
		(1) $\sigma_0 = A + B\tau_0 + C\tau_0^2$	
Ottosen	4	$a \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + b \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0$	$\sigma_0 = \frac{1}{3b} - \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{\lambda}{b} \tau_0 - \frac{a}{2b} \tau_0^2$
Hsieh-Ting-Chen	4	$a \frac{J_2}{f_c^2} + b \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + c \frac{\sigma_1}{f_c} + d \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0$	$\sigma_0 = (\frac{1}{3d} - \frac{c}{3d} \frac{\sigma_1}{f_c}) - \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{b}{d} \tau_0 - \frac{a}{2d} \tau_0^2$
Podgorski	5	$\sigma_{oct} - c_0 + c_1 P \tau_{oct} + c_2 \tau_{oct}^2 = 0$	$\sigma_0 = c_0 - c_1 P \cdot \tau_0 - c_2 f_c \cdot \tau_0^2$
(2) $\tau_0 = D + E\sigma_0 + F\sigma_0^2$			
Bresler-Pister	3	$\frac{\tau_{oct}}{f_c} = a - b \frac{\sigma_{oct}}{f_c} + c \left(\frac{\sigma_{oct}}{f_c} \right)^2$	$\tau_0 = a - b\sigma_0 + c\sigma_0^2$
Willam-Warnke	5	$\theta = 0^\circ$ $\frac{\tau_{mv}}{f_c} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{f_c} + a_2 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2$ $\theta = 60^\circ$ $\frac{\tau_{mc}}{f_c} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{f_c} + b_2 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2$	$\tau_{ot} = \frac{a_0}{\sqrt{0.6}} + \frac{a_1}{\sqrt{0.6}} \sigma_0 + \frac{a_2}{\sqrt{0.6}} \sigma_0^2$ $\tau_{oc} = \frac{b_0}{\sqrt{0.6}} + \frac{b_1}{\sqrt{0.6}} \sigma_0 + \frac{b_2}{\sqrt{0.6}} \sigma_0^2$
(3) $\tau_0 = G[\phi(\sigma_0)]^H$			

各向同性强化

考虑强化之后，屈服函数一般表达式为： $f(\sigma_{ij}, q_i) = 0$ ，其中 $q_i = (q_1, \dots, q_N)$ 称为塑性内变量，是一系列塑性应变历史的标量函数。数学表达式为： $f(\sigma_{ij}, q_i) = f(\sigma_{ij}) - q = f(\sigma_{ij}) - k(\alpha_i) = 0$

其中 $k(\alpha_i)$ 为标量函数，那么不失一般性，可认为 $k(\alpha_i) = k(\alpha)$ 。常用的塑性变量 α 的表达式有：

- 塑性功： $\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$
- 等效塑性应变： $\int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p$



运动强化

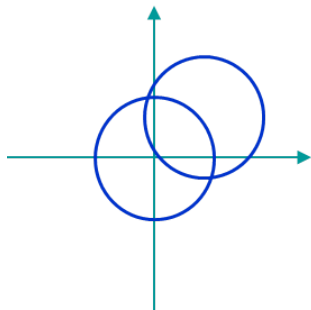
- 数学表达式为：

$$f(\sigma_{ij}, q_i) = f(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij}) - q = 0$$

- 令 $\bar{q}_{ij} = \bar{k}(\alpha)$ 即为经典随动强化
- Melan-Prager 模型

$$\bar{q}_{ij} = c\varepsilon_{ij}^p$$

- Ziegler 模型: $\dot{\bar{q}}_{ij} = \dot{\mu}(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij})$
- 记忆模型: $\dot{\bar{q}}_{ij} = c\varepsilon_{ij}^p - a\alpha\bar{q}_{ij}$



综合强化

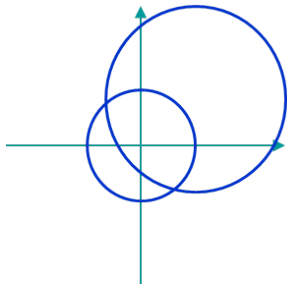
- 数学表达式为：

$$f(\sigma_{ij}, q_i) = F(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij}; \alpha_i) - k(\alpha) = 0$$

- Baltov-Sawczuk 模型

$$\begin{aligned} & F(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij}; \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \bar{q}_{ij}) : A_{ijkl}(\alpha_m) : (\sigma_{kl} - \bar{q}_{kl}) \end{aligned}$$

$$A_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + A\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{kl}^p$$



流动法则

- 考虑塑性应变演化可以表示为如下形式：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r_{ij}(\sigma_{ij}, q_i)$$

- 塑性变量的演化：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j, \quad \dot{\alpha} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} r_{ij} r_{ij}} \\ \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \sigma_{ij} r_{ij} \end{cases}$$

塑性变量的演化总可以写为：

$$\dot{q}_i = -\dot{\lambda} h_i(\sigma_{ij}, q_i)$$

弹塑性模型

- 多维弹塑性基本方程

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \text{ or } \dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p)$$

- 屈服条件 (一致条件)

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ or } f(\sigma_{ij}, \alpha_k) = 0$$

- 多维塑性演化

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r_{ij}(\sigma_{ij}, q_i)$$

- 以 $\dot{\lambda}$ 为切入点求解方程。

一致条件

- 塑性一致性条件

$$f = 0 \Rightarrow \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} r_{kl} \right) - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_i} h_i = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} r_{kl} + \frac{\partial f}{\partial q_i} h_i}$$

- 塑性应变率: $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \dot{\epsilon}_{mn}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} r_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{mn}$

切线刚度

• 应力应变微分关系

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = E_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{mn} \right) \\
 &= \left(E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} E_{ijkl} r_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{mn} \right) \\
 &= \left(E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} r_{st}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \dot{\epsilon}_{kl} \right) \\
 &= \left(E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} r_{st}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} \right) \dot{\epsilon}_{kl}
 \end{aligned}$$

切线刚度

- 切线刚度张量

$$E_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} E_{ijkl} & \dot{\lambda} = 0 \\ E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} r_{st}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} h_m} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

相关塑性流动

- 正交流动: $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$
- 令: $\dot{q}_i = -\dot{\lambda} h_i \rightarrow -\dot{\lambda} H_{ij} \frac{\partial f}{\partial q_j}$
- 塑性流动

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \dot{\epsilon}_{mn}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial f}{\partial q_n}}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial f}{\partial q_n}} \dot{\epsilon}_{mn}$$

相关塑性流动

- 切线刚度:

$$E_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} E_{ijkl} & \dot{\lambda} = 0 \\ E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{st}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} r_{mn} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial f}{\partial q_n}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量满足主对称性。

相关塑性流动

- 正交流动: $\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
- 塑性流动

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \dot{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}} \\ \dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}} \right) \dot{\epsilon} \end{cases}$$

- 切线刚度:

$$\mathbb{E}^{ep} = \begin{cases} \mathbb{E}_0 & \dot{\lambda} = 0 \\ \mathbb{E}_0 - \frac{(\mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}) \otimes (\mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}})}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量满足主对称性。

非相关塑性流动

- 非正交流动: $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}}$
- 令: $\dot{q}_i = -\dot{\lambda} h_i \rightarrow -\dot{\lambda} H_{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_j}$
- 塑性流动

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \dot{\epsilon}_{mn}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_n}}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_n}} \dot{\epsilon}_{mn}$$

非相关塑性流动

- 切线刚度:

$$E_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} E_{ijkl} & \dot{\lambda} = 0 \\ E_{ijkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqkl} E_{ijst} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{st}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} E_{pqmn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial q_m} H_{mn} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_n}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量不满足主对称性。

非相关塑性流动

- 非正交流动: $\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{f}(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
- 塑性流动

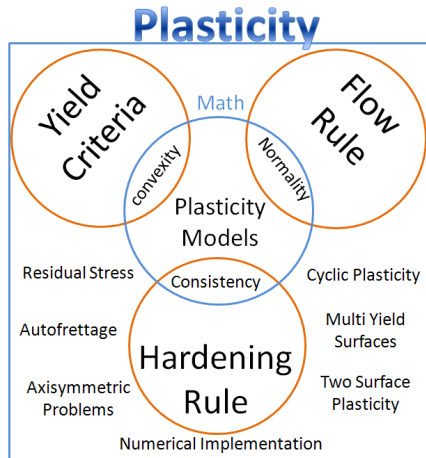
$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \dot{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}} \\ \dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}} \right) \dot{\epsilon} \end{cases}$$

- 切线刚度

$$\mathbb{E}^{ep} = \begin{cases} \mathbb{E}_0 & \dot{\lambda} = 0 \\ \mathbb{E}_0 - \frac{\left(\mathbb{E}_0 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \left(\mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{E}_0 : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q}} & \dot{\lambda} > 0 \end{cases}$$

此时切线刚度张量不再满足主对称性。

塑性理论总结



- 一维弹塑性损伤本构关系 (回顾)

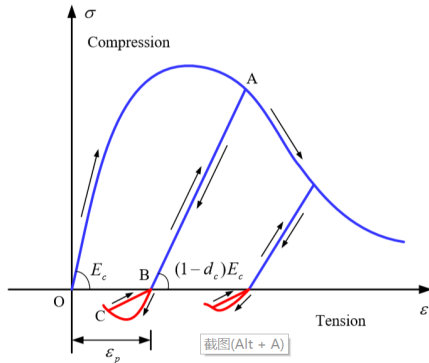
$$\sigma = (1 - D_{ct})E_0(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

- 考虑拉压过渡的损伤变量

$$D_{ct} = \mathbf{H}(\sigma) d_t + \mathbf{H}(-\sigma) d_c$$

- Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



弹塑性损伤本构关系

- 多维弹塑性损伤本构关系表达式

$$\sigma = (1 - D_{ct})E_0(\varepsilon - \varepsilon_p) \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$$

- 定义有效应力

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$$

- 有

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

- **核心任务**：寻求损伤张量 $\mathbb{D}$ 和塑性应变 ε_p 的表达形式和演化规律。

混凝土的损伤机制

若不考虑高静水压力作用下的压碎性破坏，则可以认为：混凝土材料的损伤和破坏源于两种基本的物理机制，受拉损伤机制和受剪损伤机制。受拉损伤机制代表了混凝土材料各相组分之间的受拉分离。经典的最大拉应力（拉应变）断裂准则即认为材料破坏是由于受拉损伤机制所致。受剪损伤机制则代表了混凝土材料各相组分之间内粘接力的破坏。

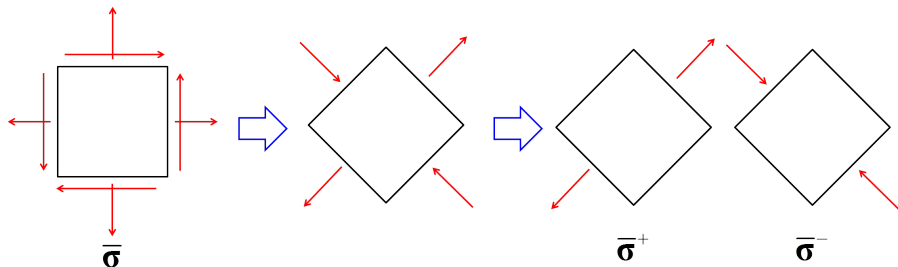
- 在受拉为主的应力状态下（如单轴受拉、双轴受拉等）、球量空间内，混凝土损伤由受拉损伤机制控制，采用受拉损伤变量 d^+ 描述，其对应的应力状态用 σ^+ 表示。
- 在受压为主的应力状态下（如单轴受压、双轴受压等），由于在偏量空间内不存在拉应力，混凝土损伤由受剪损伤机制控制，采用受拉损伤变量 d^- 描述，其对应的应力状态用 σ^- 表示。

同时考虑 d^+ 和 d^- 所建立的损伤模型称为双标量损伤模型。由于其较为全面地描述了混凝土的非线性特性，所以目前此类模型已成为混凝土非线性分析所采用的标准模型，且对应的简化模型已写入《混凝土结构设计规范》(GB50010-2010)。

弹塑性损伤本构关系

- 为了描述拉、压应力状态，引入有效应力正负分解：

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}^-$$



有效应力正负分解二维图示

弹塑性损伤本构关系

- 引入四阶投影张量

$$\bar{\sigma}^+ = \mathbb{P}^+ : \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma}^- = \mathbb{P}^- : \bar{\sigma}$$

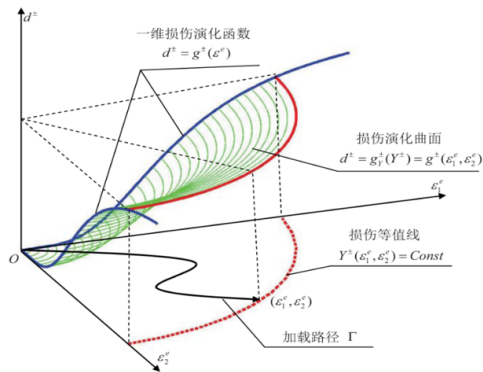
- 四阶投影张量满足单位分解

$$\mathbb{P}^+ + \mathbb{P}^- = \mathbb{I}$$

- 利用投影张量将四阶损伤张量投影到标量空间

$$D_{ct} = H(\sigma) d_t + H(-\sigma) d_c \rightarrow \mathbb{D} = d^+ \mathbb{P}^+ + d^- \mathbb{P}^-$$

弹塑性损伤本构关系



多维损伤演化：能量等效应变

● 能量等效应变驱动损伤演化

$$\begin{cases} d^{+} = g^{+}(\varepsilon^{e+}) \\ d^{-} = g^{-}(\varepsilon^{e-}) \end{cases}$$

● 一维损伤演化

$$d_{ct} = \begin{cases} 1 - \frac{\rho_{ct}n}{n-1+x^n}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{\rho_{ct}}{\alpha_{ct}(x-1)^2+x}, & x > 1 \end{cases}$$

弹塑性损伤本构关系

- 塑性应变演化：有效应力空间塑性力学（参阅论文、教材等）
- 经验塑性模型

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}^{p+} + \dot{\epsilon}^{p-} \\ \dot{\epsilon}^{p+} = f_p^+ \dot{\epsilon}^{e+} = f_p^+ \mathbb{E}_0^{-1} : \dot{\sigma}^+ \\ \dot{\epsilon}^{p-} = f_p^- \dot{\epsilon}^{e-} = f_p^- \mathbb{E}_0^{-1} : \dot{\sigma}^- \end{cases}$$

其中，塑性发展函数

$$f_p^{\pm} = f_p^{\pm}(\dot{d}^{\pm}, d^{\pm}) = H(\dot{d}^{\pm}) \xi_p^{\pm} (d^{\pm})^{n_p^{\pm}}$$

实用损伤本构关系

考虑损伤本构关系

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$$

表征退化后刚度的割线刚度张量定义为

$$\mathbb{E}^{sec} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{E}_0 = (\mathbb{I} - d^+ \mathbb{P}^+ - d^- \mathbb{P}^-) : \mathbb{E}_0$$

在二维受力状态下，对于各向同性材料，其初始弹性刚度张量可以写为如下矩阵形式

$$[\mathbb{E}] = \frac{1}{1 - \nu_0^2} \begin{bmatrix} E_0 & E_0 \nu_0 & 0 \\ E_0 \nu_0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_0^2) G_0 \end{bmatrix}$$

损伤本构关系矩阵表示

由于正负分解在正负方向上的不连续性，对于不同的受力状态，损伤表达式的矩阵表示并不相同，**主应力空间表达式为**：

- **双轴受拉** ($\bar{\sigma}_1 > 0, \bar{\sigma}_2 > 0$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = (1 - d^+) \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{Bmatrix}$$

- **双轴受压** ($\bar{\sigma}_1 \leq 0, \bar{\sigma}_2 \leq 0$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = (1 - d^-) \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{Bmatrix}$$

- **双轴拉压** ($\bar{\sigma}_1 > 0, \bar{\sigma}_2 \leq 0$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 - d^+) \bar{\sigma}_1 \\ (1 - d^-) \bar{\sigma}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - d^+) & 0 \\ 0 & (1 - d^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{Bmatrix}$$

损伤本构关系矩阵表示

- 不考虑塑性变形，有效（主）应力表达式

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_0^2} \begin{bmatrix} E_0 & E_0 \nu_0 \\ E_0 \nu_0 & E_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix}$$

- 损伤演化函数

$$d^\pm = \begin{cases} 1 - \frac{\rho^\pm n}{n-1+x^n}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{\rho^\pm}{\alpha^\pm (x-1)^2 + x}, & x > 1 \end{cases}$$

其中

$$x = \frac{\varepsilon^{e\pm}}{\varepsilon^\pm}$$

损伤本构关系矩阵表示

能量等效应变表达式

- 双轴受拉 ($\bar{\sigma}_1 < 0$, $\bar{\sigma}_2 < 0$)

$$\varepsilon^{e+} = -\sqrt{\frac{1}{1-\nu_0^2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu_0\varepsilon_1\varepsilon_2)} , \varepsilon^{e-} = 0$$

- 双轴受压 ($\bar{\sigma}_1 \geq 0$, $\bar{\sigma}_2 \geq 0$)

$$\varepsilon^{e+} = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{e-} = & \frac{1}{(1-\nu_0^2)(1-\alpha_s)} [-\alpha_s(1+\nu_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ & + \sqrt{(\varepsilon_1 + \nu_0\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \nu_0\varepsilon_1)^2 - (\varepsilon_1 + \nu_0\varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \nu_0\varepsilon_1)}] \end{aligned}$$

损伤本构关系矩阵表示

能量等效应变表达式

- 双轴拉压 ($\bar{\sigma}_1 \geq 0$, $\bar{\sigma}_2 < 0$)

$$\varepsilon^{e+} = -\sqrt{\frac{1}{1-\nu_0^2}\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$\varepsilon^{e-} = \frac{1}{(1-\nu_0^2)(1-\alpha_s)} \left[-\alpha_s(1+\nu_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right. \\ \left. + \sqrt{(\varepsilon_1 + \nu_0\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 + \nu_0\varepsilon_1)^2 - (\varepsilon_1 + \nu_0\varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \nu_0\varepsilon_1)} \right]$$

结束

更详细的知识在弹塑性力学、损伤力学等课程.



Find more: <http://www.renxiaodan.com/>