有限单元法研究生核心课程

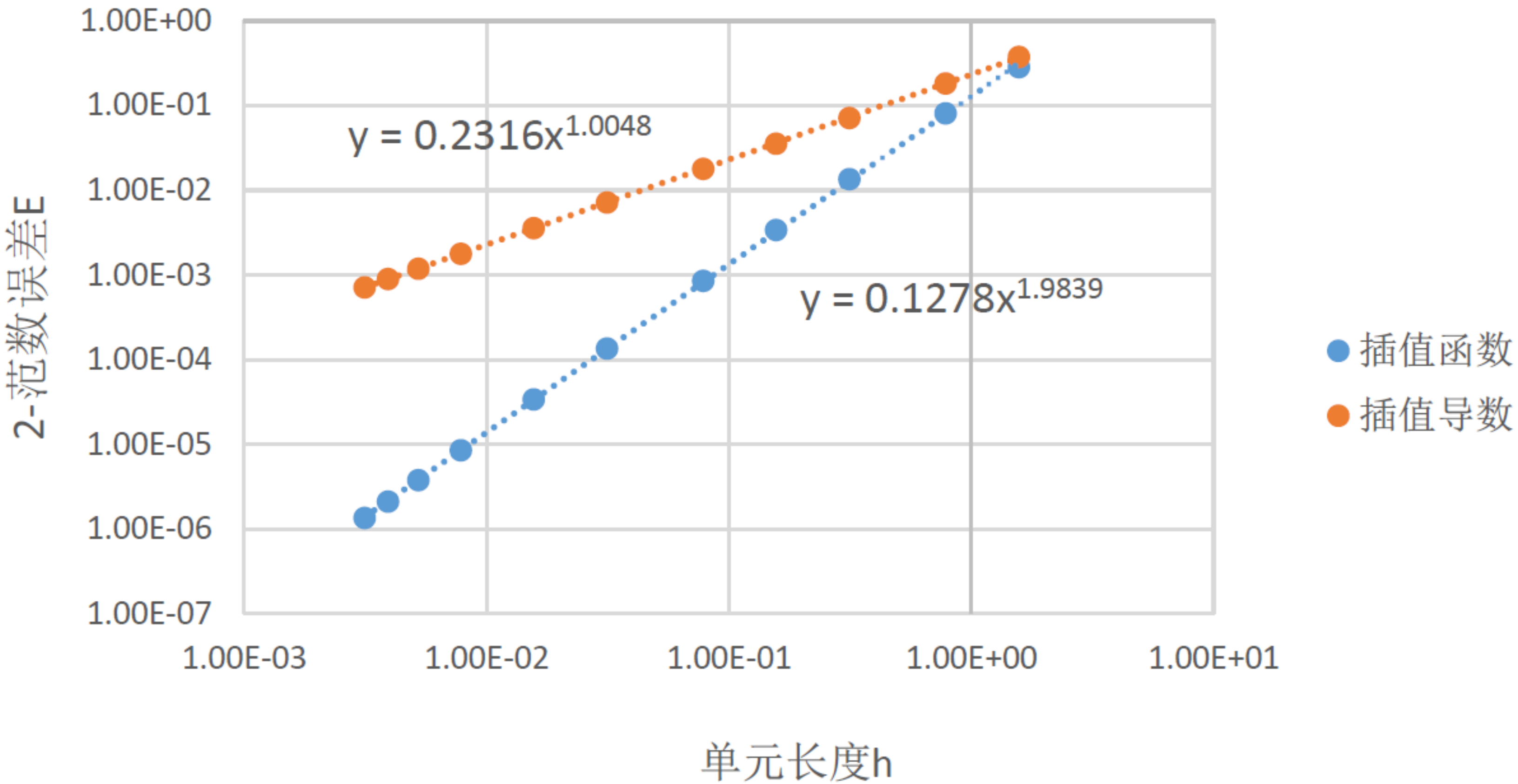
第八讲 约束条件与广义变分原理

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

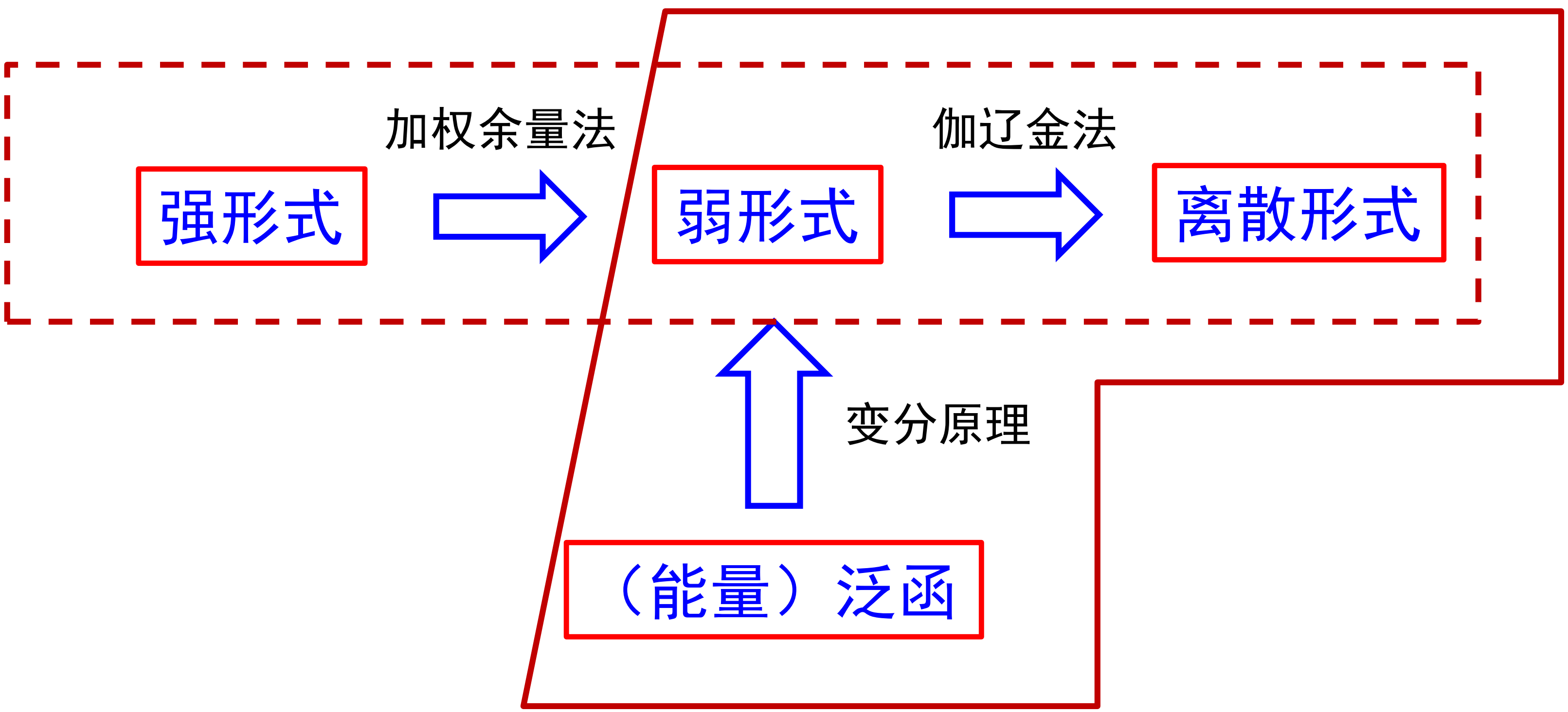
同济大学土木工程学院

第一次大作业



1.00E+00
1.00E-01
1.00E-02
1.00E-03
1.00E-04
1.00E-05
1.00E-06
1.00E-07
2-范数误差E
y = 0.2316x1.0048
y = 0.1278x1.9839
1.00E-03
1.00E-02
1.00E-01
1.00E+00
1.00E+01
单元长度h
插值函数
插值导数

固体结构数值计算方法



基础变分原理

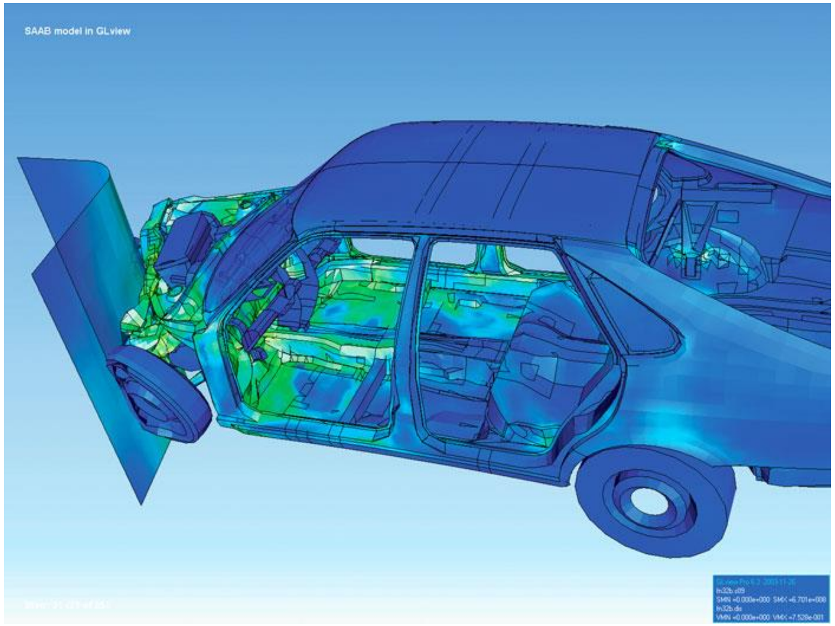
势能泛函 $$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} u_i b_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_s} u_i t_i \mathrm{d}\Gamma$$

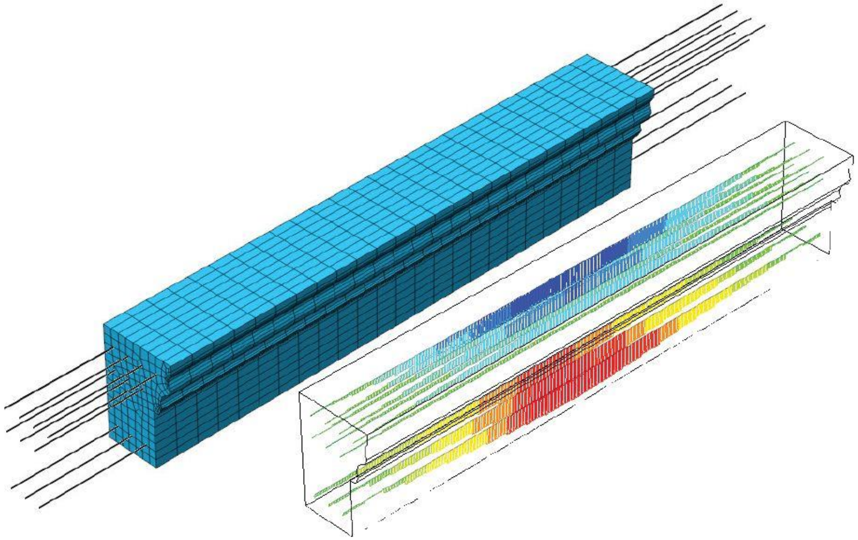
根据无约束极值原理，有泛函变分 $$\delta\Pi = 0$$

弱形式 $$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma = 0$$

约束条件

不包含在弱形式中，须（额外）满足的条件，比如：位移约束、接触位移，薄板（浅梁）问题、不可压缩，等等……





约束条件的引入

Find $\min \Pi(u_i)$

Subjected to $C_j(u_i) = 0$ in/on □

某些约束条件可以通过合理划分网格、合理引入插值函数或者合理耦合某些节点自由度的方式直接引入，其实质是基于网格和插值函数的构造使得原弱形式包含了约束条件。该方法局限性较强，只能适用于某些约束条件，同时会干扰网格划分的过程。

约束条件的引入

Find $\min \Pi(u_i)$

Subjected to $C_j(u_i) = 0$ in/on □

罚函数法 $\Pi^{**}(u_i) = \Pi(u_i) + \frac{\alpha}{2}\int_{\square} C_j(u_i)C_j(u_i)\,\mathrm{d}\square$

α为罚数，一般取为大值正整数，再结合 $\delta\Pi^{**} = 0$

考虑约束条件的弱形式 $\delta\Pi(u_i) + \alpha\int_{\square} C_j(u_i)\delta C_j(u_i)\,\mathrm{d}\square = 0$

罚函数法使用简单，不增加附加变量，所得泛函仍然满足驻值条件，但是只能得到近似解，且罚数的取值也需要一定技巧。

以位移约束条件为例

Find $\min \Pi(u_i)$

Subjected to $u_i = \bar{u}_i$ on Γ_u

罚函数法
$$\Pi^{**}(u_i) = \Pi(u_i) + \frac{\alpha}{2}\int_{\Gamma_u}(u_i - \bar{u}_i)(u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma$$

$$\delta\Pi^{**} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\Pi(u_i) + \alpha\int_{\Gamma_u}\delta u_i(u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma = 0$$

$$\int_{\Omega}\delta\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\Omega + \alpha\int_{\Gamma_u}\delta u_i u_i\,\mathrm{d}\Gamma$$
$$= \int_{\Omega}\delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s}\delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma + \alpha\int_{\Gamma_u}\delta u_i \bar{u}_i\,\mathrm{d}\Gamma$$

以位移约束条件为例

常规有限元法得对角矩阵，来源于插值函数的delta性质。

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u_i u_i \,\mathrm{d}\Gamma$$

$$= \int_\Omega \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u_i \bar{u}_i \,\mathrm{d}\Gamma$$

$$\xrightarrow{\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}} (\mathbf{K} + \alpha \mathbf{K}^\alpha)\mathbf{a} = \mathbf{P} + \alpha \mathbf{K}^\alpha \bar{\mathbf{u}}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & K_{jj} + \alpha K_{jj}^\alpha & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_j + \alpha K_{jj}^\alpha \bar{u}_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

置大数法

置0-1法……

被动罚函数泛函

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV = \int_V \mu e_{ij}e_{ij}dV + \int_V \frac{1}{2}K\left(\varepsilon_{kk}\right)^2 dV$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\upsilon)} \qquad \upsilon \to 0.5$$

不可压缩材料

$$K \to \infty, \varepsilon_{kk} \to 0$$

被动罚数！

约束条件（不论主动被动）须能够被有限元解空间涵盖，否则将引起锁闭（locking）问题！

约束条件的引入

Find $\min \Pi(u_i)$

Subjected to $C_j(u_i) = 0$ in/on $\square$

拉格朗日乘子法 $\Pi^*(u_i, \lambda_j) = \Pi(u_i) + \int_{\square} \lambda_j C_j(u_i)\,\mathrm{d}\square$

根据约束驻值原理，有泛函变分 $\delta\Pi^* = 0$

考虑约束条件的弱形式 $\delta\Pi(u_i) + \int_{\square} \delta\lambda_j C_j(u_i)\,\mathrm{d}\square + \int_{\square} \lambda_j \delta C_j(u_i)\,\mathrm{d}\square = 0$

以位移约束条件为例

Find $\quad \min \Pi(u_i)$

Subjected to $\quad u_i = \bar{u}_i \quad$ on Γ_u

拉格朗日乘子法 $\quad \Pi^*(u_i, \lambda_j) = \Pi(u_i) + \int_{\Gamma_u} \lambda_i (u_i - \bar{u}_i) \, \mathrm{d}\Gamma$

泛函变分 $\quad \delta\Pi^* = \delta\Pi(u_i) + \int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i (u_i - \bar{u}_i) \, \mathrm{d}\Gamma = 0$

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i u_i \, \mathrm{d}\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i \bar{u}_i \, \mathrm{d}\Gamma$$

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

以位移约束条件为例

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i u_i \, \mathrm{d}\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i \bar{u}_i \, \mathrm{d}\Gamma$$

$$\Big\Downarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{Na} \\ \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Mb} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix}$$

不是方阵，不可逆。

以位移约束条件为例

$$\delta\Pi^* = \int_\Omega \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i (u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma=\Gamma_s\cup\Gamma_u} \delta u_i \sigma_{ij} n_j \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta u_i \sigma_{ij,j} \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i (u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_s} \delta u_i \left(\sigma_{ij} n_j - t_i\right) \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta u_i \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right) \mathrm{d}\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_u} \delta u_i \left(\sigma_{ij} n_j + \lambda_i\right) \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i (u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma = 0$$

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta u_i \lambda_i \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i u_i \,\mathrm{d}\Gamma$$
$$= \int_\Omega \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i \bar{u}_i \,\mathrm{d}\Gamma$$

以位移约束条件为例

$$\int_{\Gamma_s} \delta u_i \left(\sigma_{ij} n_j - t_i\right)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega \delta u_i \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta u_i \left(\sigma_{ij} n_j + \lambda_i\right)\mathrm{d}\Gamma$$
$$+ \int_{\Gamma_u} \delta\lambda_i (u_i - \bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma = 0$$

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \text{ in } \Omega \quad \sigma_{ij} n_j - t_i = 0 \text{ on } \Gamma_s$$
$$\lambda_i = -\sigma_{ij} n_j \quad u_i - \bar{u} = 0 \text{ on } \Gamma_u$$

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta u_i \sigma_{ij} n_j \,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} n_j \delta\sigma_{ij} u_i \,\mathrm{d}\Gamma$$
$$= \int_\Omega \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} n_j \delta\sigma_{ij} \bar{u}_i \,\mathrm{d}\Gamma$$

土木工程学院

COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

以位移约束条件为例

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta u_i \sigma_{ij} n_j \,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} n_j \delta\sigma_{ij} u_i \,\mathrm{d}\Gamma$$

$$= \int_{\Omega} \delta u_i b_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta u_i t_i \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} n_j \delta\sigma_{ij} \bar{u}_i \,\mathrm{d}\Gamma$$

$$\Big\Downarrow \; \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}$$

$$\left[\mathbf{K} - \left(\mathbf{K}^{\beta}\right)^{\mathrm{T}} - \mathbf{K}^{\beta}\right]\mathbf{a} = \mathbf{P} - \mathbf{K}^{\beta}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\Big\Uparrow$$

$$\mathbf{K}^{\beta} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{n}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{N} \,\mathrm{d}\Gamma$$

约束条件的引入

拉格朗日乘子法的若干评论:

- 通过拉格朗日乘子法，可以构造满足各类约束条件的弱形式；
- 拉格朗日乘子法将泛函极值问题变为驻值问题，可能会带来求解的困难；
- 常规拉格朗日乘子法所得方程包含基本变量u与附加变量λ，需要对二者分别构造插值；
- 拉格朗日乘子法所得方程耦合度较高，稀疏性较差，且主对角线上存在零元素；
- 可以通过解析求解泛函变分表达式，识别拉格朗日乘子λ与基本变量的关系，再基于该关系构造修正泛函。该方法构成了广义变分原理的理论基础。

广义变分原理

$$\Pi_{\text{H-W}}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega u_i b_i\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_s} u_i t_i\,\mathrm{d}\Gamma$$
$$-\int_\Omega \sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right]\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma$$

- 由胡海昌（Hu 1954）和鹫津久（Washizu 1955）分别独立提出。
- 泛函中位移、应变与应力各自独立，平衡、协调、边界条件均直接包含。
- 钱伟长（1964）最先发现可以由拉格朗日乘子法建立。

$$\Pi_{\text{H-W}}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega u_i b_i\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_s} u_i t_i\,\mathrm{d}\Gamma$$
$$+\int_\Omega \lambda_{ij}^{\varepsilon}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right]\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_u}\lambda_i^{u}(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma$$

广义变分原理

$$\Pi_{\text{H-W}}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij})=\int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega u_i b_i \mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_s} u_i t_i \mathrm{d}\Gamma$$
$$-\int_\Omega \sigma_{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right]\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma$$

用应力替换应变

势能　余能

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$\Pi_{\text{H-R}}(u_i,\sigma_{ij})=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}\right]\mathrm{d}\Omega$$
$$-\int_\Omega u_i b_i \mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_s} u_i t_i \mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}\Gamma$$

- 由Hellinger与Reissner提出。
- 泛函中位移与应力各自独立，应变须根据本构关系由应力求出。
- 适用于构造位移与应力分别插值的有限元格式（卞学璜-Pian），称为混合/杂交格式（mixed/hybrid formulation）。

广义变分原理

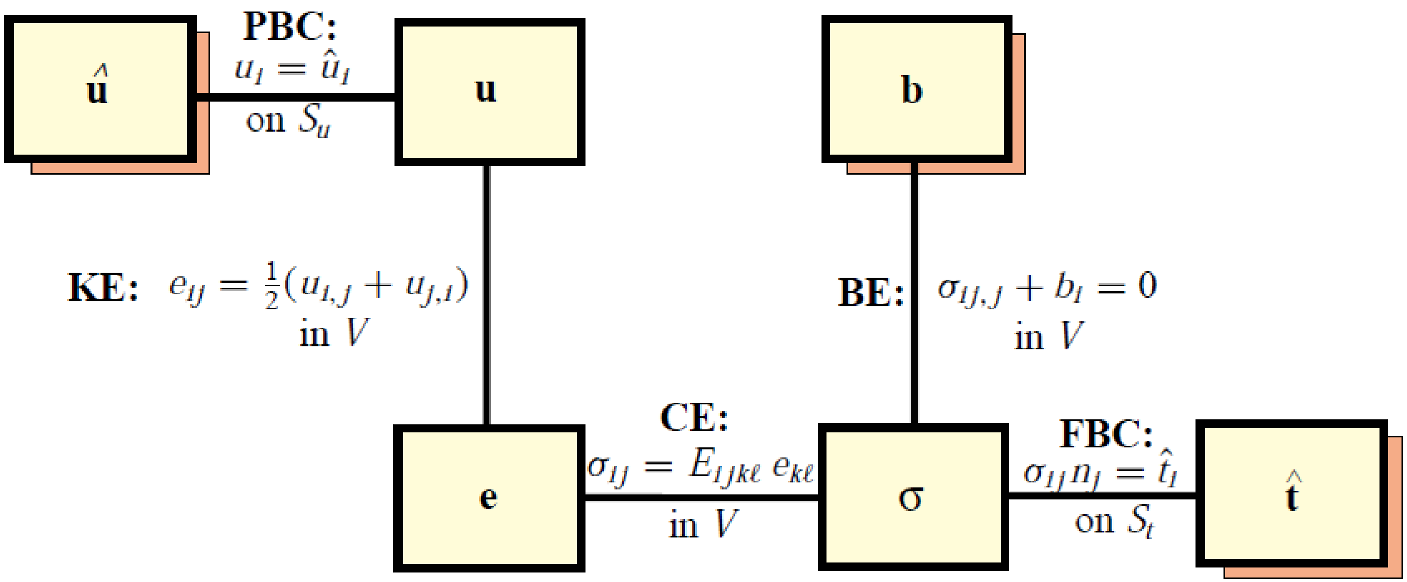
$$\Pi_{\text{H-R}}(u_i,\sigma_{ij})=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}\right]\mathrm{d}\Omega$$
$$-\int_\Omega u_i b_i\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_s}u_i t_i\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}\,\Gamma$$

分部积分，考虑平衡方程 $\sigma_{ij,j}+b_i=0$

$$\Pi_{\mathrm{c}}(\sigma_{ij})=\int_\Omega\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\,\mathrm{d}\,\Gamma$$

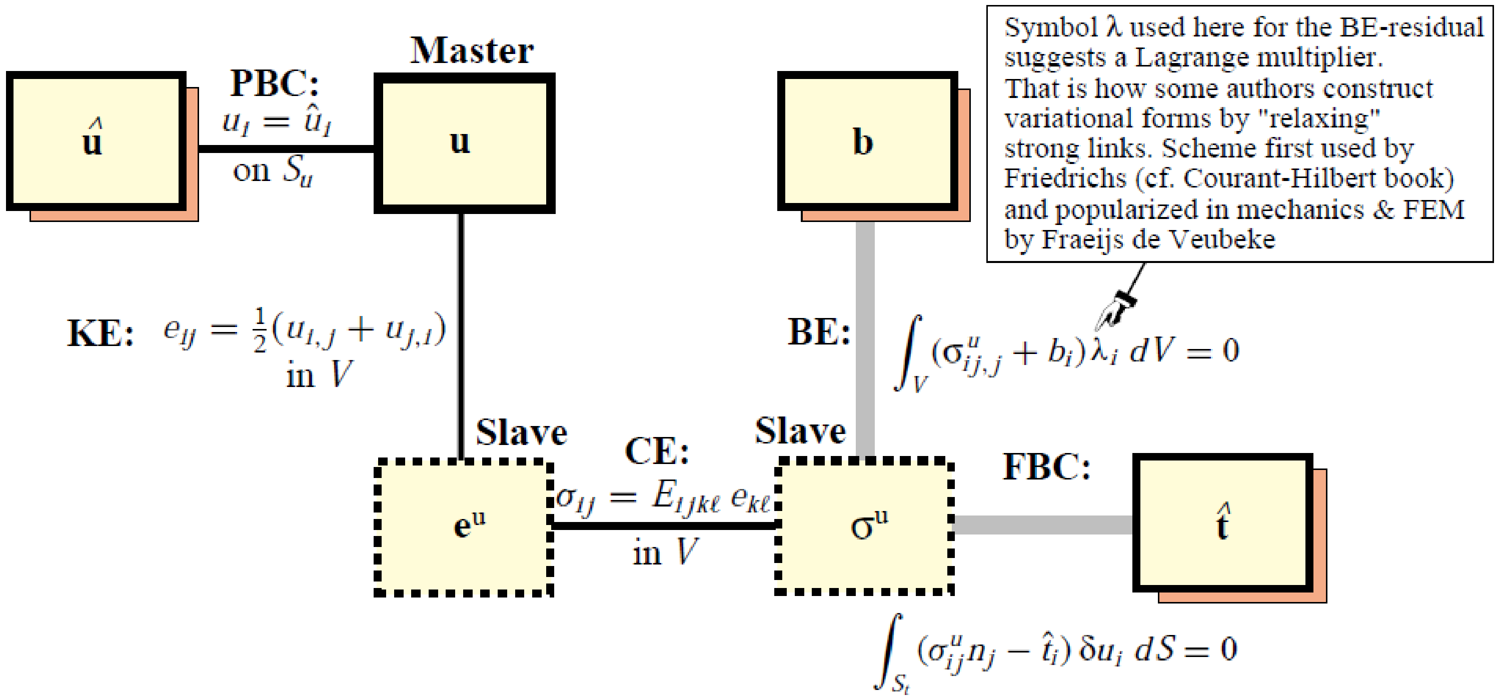
- 最小余能原理。
- 可基于虚应力原理直接推导得到。

各类形式流程图



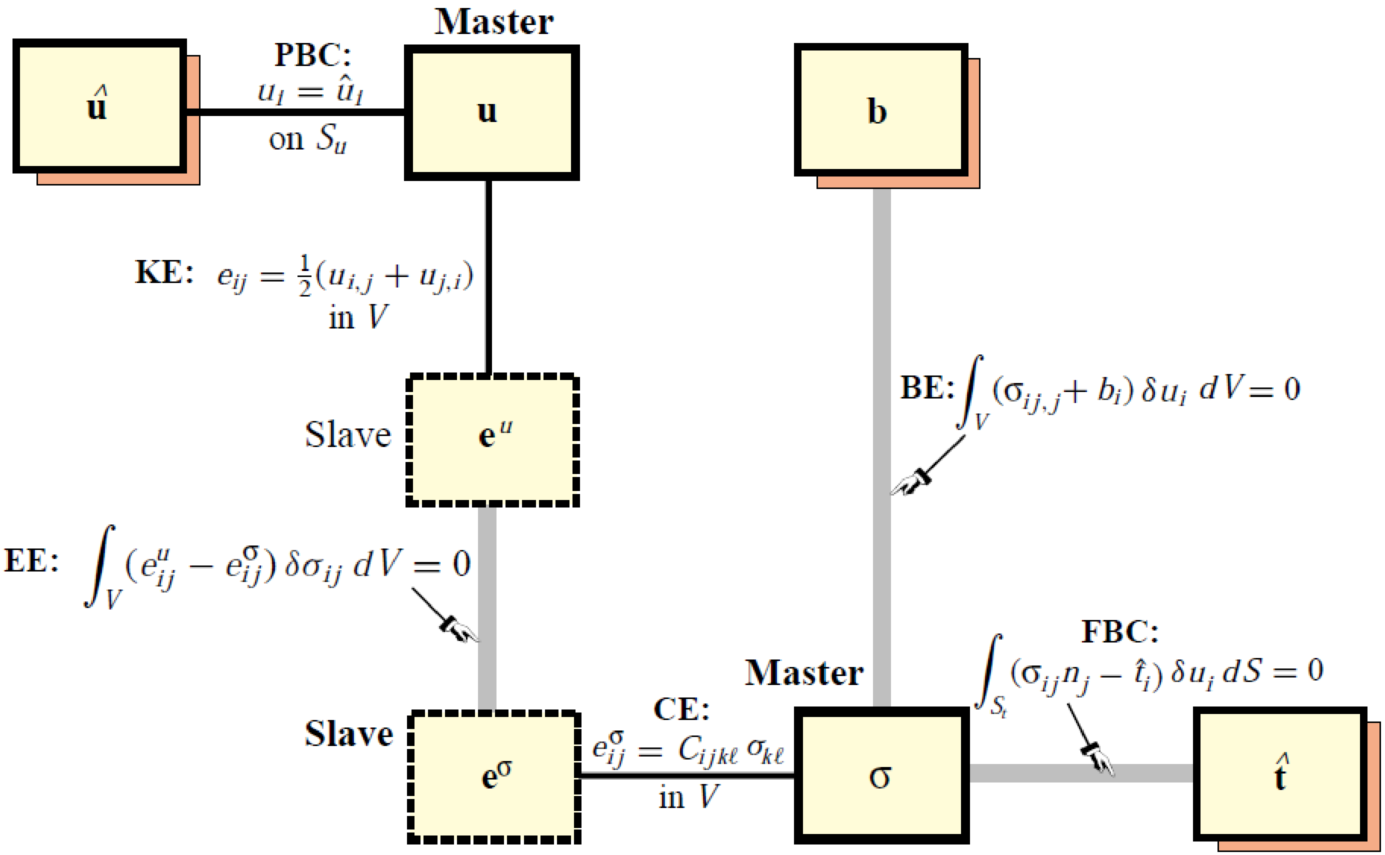
强形式流程图

各类形式流程图



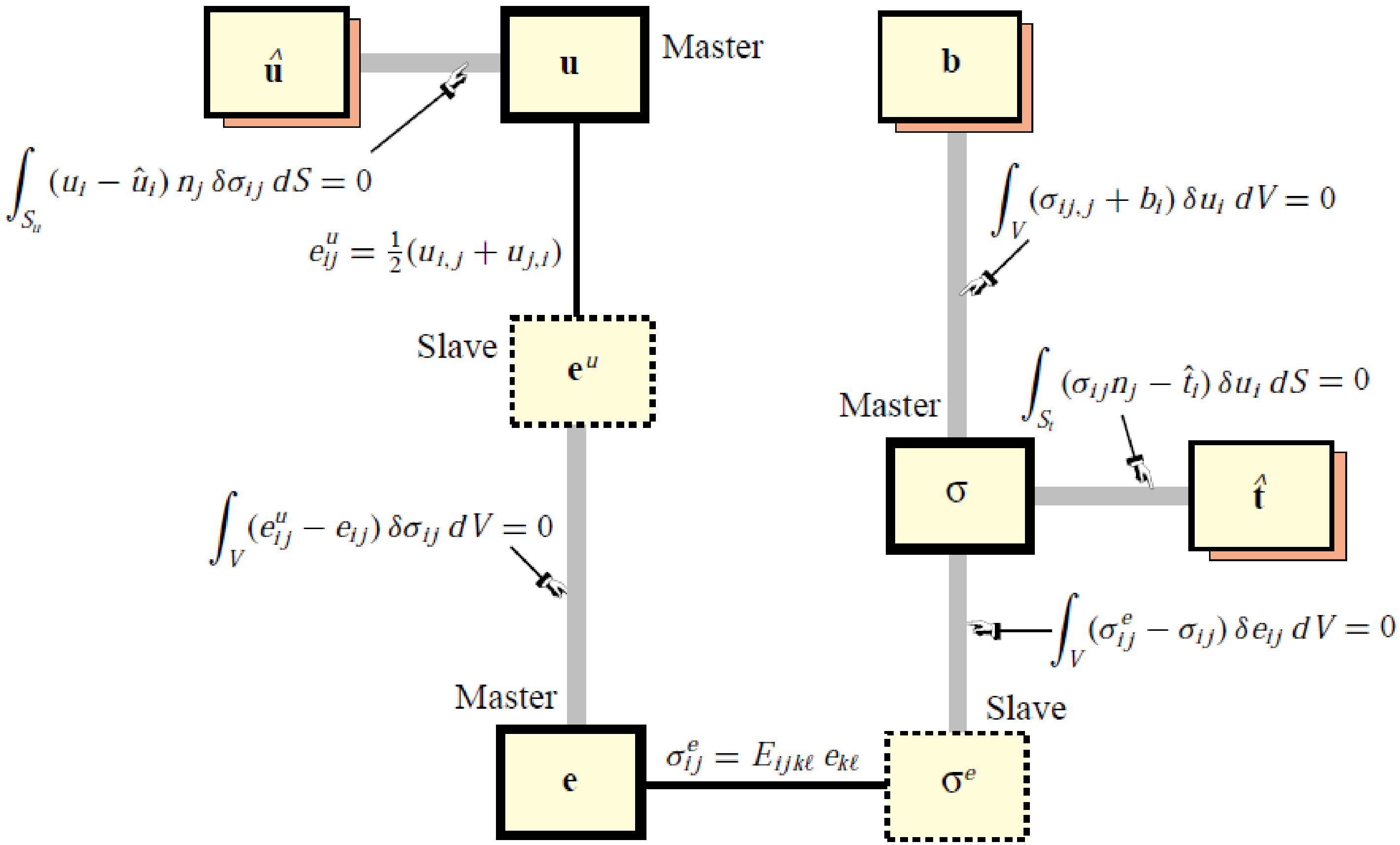
基本势能变分原理流程图

各类形式流程图



Hellinger-Reissner变分原理流程图

各类形式流程图



Hu-Washizu变分原理流程图

公共邮箱

地址：fem_tongji@163.com

密码：youxiandanyuanfa

今天就到这里，

明天的事儿明天再说！

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING