

第六讲 数值积分

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院



单元积分

$$\mathbf{K}^e = \int_{\bar{\Omega}^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} | \mathbf{J} | d\Omega$$

一般情况下，对于稍微复杂的单元和等参变换，上述积分的理论解即变得十分复杂，所以有限元应用过程中上述积分一般基于数值积分求得。数值积分又称为quadrature。



数值积分应用一例

通用体积计算公式：
$$V = \frac{H}{6} (S_{\text{底}} + 4S_{\text{中}} + S_{\text{顶}})$$

对于几乎所有的常见的能够划分出底、中、顶三个平行截面的几何体均成立！

其本质是辛普生数值积分公式，该公式具有三阶（超）代数精度，即对于三次及三次以下代数多项式的积分结果是精确的。而沿着轴线方向截面积的三次多项式变化可以包含常见的大部分几何体。此例充分说明了对于多项式及相关函数的积分，较之解析积分方法，数值积分很多时候更能够同时满足准确性和简便性两方面的要求。



一维积分

一维数值积分一般表示为：

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_q} H_i f(\xi_i)$$

固定积分点位置（一般为等距分布），以积分点处函数值作为自由度来逼近给定函数，可得Newton-Cotes积分：

$$f(x) \approx \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n_q} l_i^{n-1}(\xi) f(\xi_i)$$

$$H_i = \int_a^b l_i^{n-1}(\xi) d\xi$$

$$= (b-a) C_i^{n-1}$$

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \approx \int_a^b \varphi(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_q} \left(\int_a^b l_i^{n-1}(\xi) d\xi \right) f(\xi_i)$$



一维积分

除了积分点处函数值，积分点位置也可以当做自由度来逼近给定函数，基于此概念可建立Gauss积分。

$$f(x) \approx \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n_q} l_i^{n-1}(\xi) f(\xi_i) + w(\xi) P(\xi)$$

不论积分点 ξ_i 位置如何分布，具备逼近任意 $n_q - 1$ 阶多项式的能力。

任意 $n_q - 1$ 阶多项式。

$$P(\xi) = \prod_{i=1}^{n_q} (\xi - \xi_i)$$

为 n_q 阶多项式，在积分点 ξ_i 位置处等于0。

上式总体上为 $2n_q - 1$ 阶多项式！



一维积分

考虑积分：
$$\int_a^b w(\xi)P(\xi)d\xi = 0$$

合理选取积分点 ξ_i 位置，使得对于任意 $n_q - 1$ 阶多项式 $w(\xi)$ ，上述积分均成立。此时对应 ξ_i 即为高斯点，积分公式

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_q} H_i f(\xi_i)$$

具有 $2n_q - 1$ 阶代数精度！基于勒让德正交多项式，不失一般性，可求得定义在 $[-1,1]$ 区间上函数积分的Gauss点坐标和积分系数。

混合积分策略……



正交区域高维积分

二维积分：

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_{q1}} \sum_{j=1}^{n_{q2}} H_i H_j f(\xi_i, \eta_j)$$

三维积分：

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{n_{q1}} \sum_{j=1}^{n_{q2}} \sum_{k=1}^{n_{q3}} H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$



斜交区域高维积分

二维积分：

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2) dL_1 dL_2$$

三维积分：

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 dL_3$$

Iron积分，Hammer积分.....



积分阶次的选取

$$\mathbf{K}^e = \int_{\bar{\Omega}^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} | \mathbf{J} | d\Omega$$

- 数值积分的精度与单元插值的精度应该搭配，并同时考虑雅克比行列式的影响。
- 以弹性力学问题为例，若单元插值的精度为 p ，应变矩阵的导数为1阶，若要刚度矩阵精确积分（称为完全积分），则在雅克比矩阵为常数的情况下，刚度矩阵的为 $2(p-1)$ 阶多项式，对应高斯点个数至少为 p^N 个（对应 $2p-1$ 阶积分精度）。
- 如果雅克比矩阵不为常数，即单元计算时使用了复杂的等参变换，那么为了得到精确（完全）的数值积分，积分精度在上述基础上还需要提高，所需高斯点个数也要进一步增加。



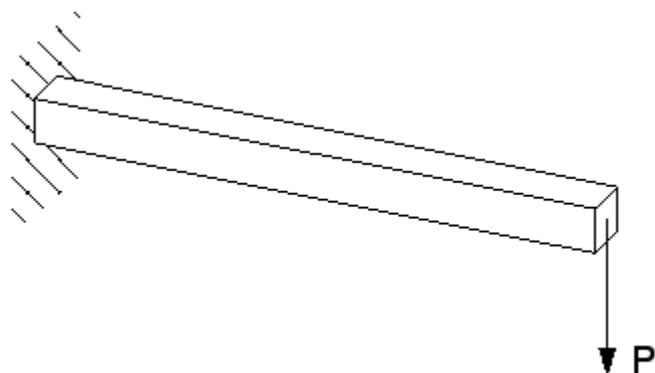
积分阶次的选取

- 有时基于特殊的考虑，会考虑积分阶次与插值阶次不匹配的情况，这种情况统称为**减缩积分**。
- 这些情况包括：
 - 需要故意漏掉某些可能对结果产生影响的（不完全）高阶项。
 - 刻意使得罚函数矩阵保持奇异。
- 减缩积分，以减小计算量，同时释放某些内部自由度，减小有限元模型的整体刚度。

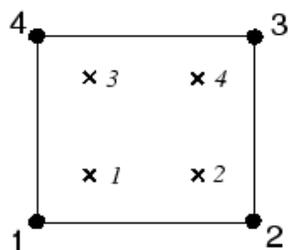
用另一个错误弥补另一个错误!



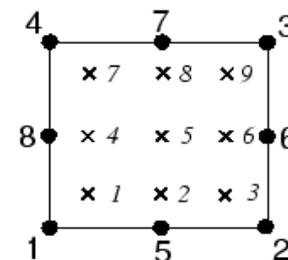
分析示例



悬臂梁分析



Linear element
(e.g., CPS4)



Quadratic element
(e.g., CPS8)

全积分单元



网格细化过程



土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

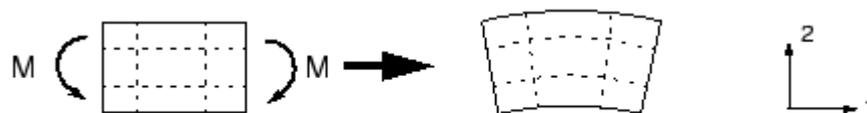
分析示例

端部位移结果（模拟结果除以精确解）

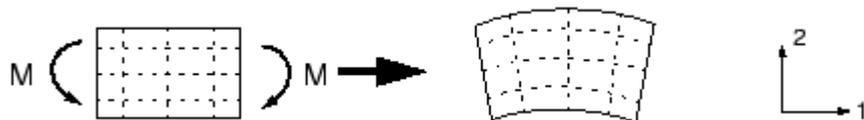
单元	网格			
	1×6	2×12	4×12	8×24
CPS4	0.074	0.242	0.242	0.561
CPS8	0.994	1.000	1.000	1.000



一次单元受弯变形



实际受弯变形



二次单元受弯变形



分析示例

一次单元位移场:

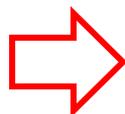
$$\begin{cases} u = a_1 + b_1x + c_1y + d_1xy \\ v = a_2 + b_2x + c_2y + d_2xy \end{cases}$$

一次单元应变场:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = b_1 + d_1y, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = c_2 + d_2x$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (c_1 + b_2 + d_1x + d_2y)$$

$$\varepsilon_{xy} \rightarrow 0 \Rightarrow c_1, b_2, d_1, d_2 \rightarrow 0$$

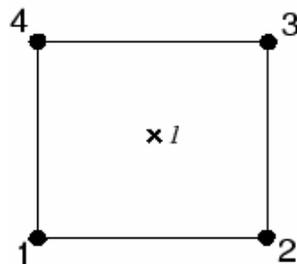
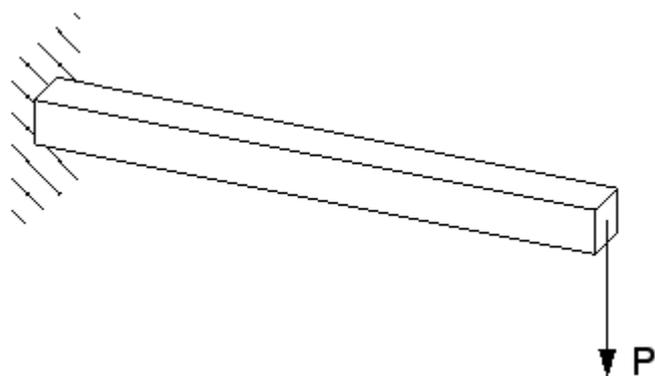


由于剪切变形很小，连带单元产生局部弯曲变形的刚度异常增大，这种现象称为**剪切锁闭 (shear locking)**。
锁闭问题还将在后续讲解中继续探讨！

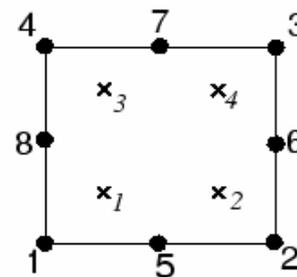
单元产生局部弯曲变形的刚度异常增大！



分析示例



Linear element
(e.g., CPS4R)



Quadratic element
(e.g., CPS8R)

减缩积分单元



悬臂梁分析

一阶减缩积分单元受弯变形

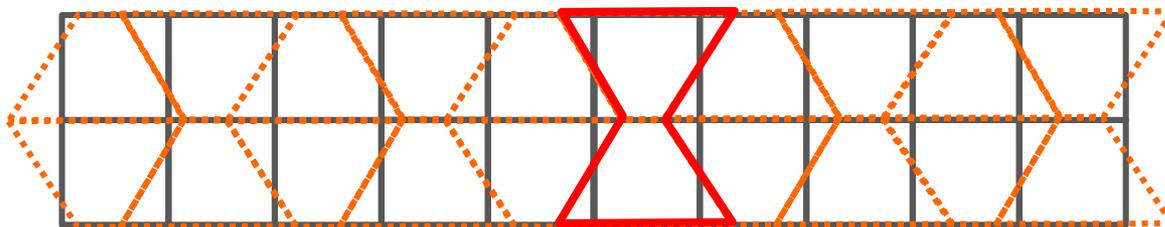
端部位移结果（模拟结果除以精确解）

单元	网格			
	1×6	2×12	4×12	8×24
CPS4R	20.3	1.308	1.051	1.012
CPS8R	1.000	1.000	1.000	1.000

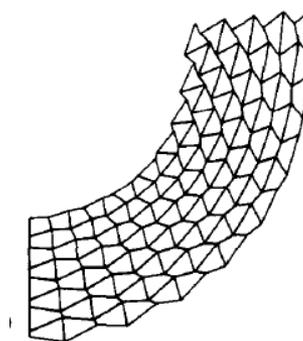
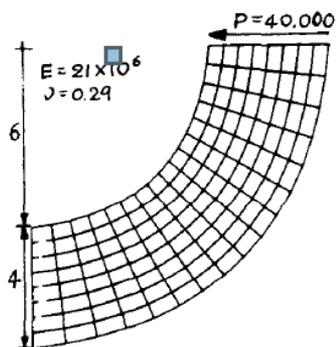


分析示例

- 平面一阶减缩积分单元故意漏掉了 xy 项，此项变形不受任何约束，甚至不影响结构的应变能（**Spurious zero energy mode**），在某些情况下也有可能对结果产生不利影响。



沙漏问题!



分析示例

秩亏 (Rank deficiency)

以四节点平面单元为例:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

8×8 8×3 3×3 3×8

对于全积分单元, 上述刚度矩阵精确获得, 可以发现:

$$\text{Rank}(\mathbf{k}^e) = 5$$

则有3个零特征值, 对应于三个刚体位移模式, 刚体位移模式发生时不产生应变能。



分析示例

秩亏 (Rank deficiency)

以四节点平面单元为例:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

8×8 8×3 3×3 3×8

对于减缩积分单元:

$$\mathbf{k}^e = |J| \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \Big|_{\xi=0, \eta=0}$$

8×3 3×3 3×8

$\text{Rank}(\mathbf{k}^e) = 3 < 5$

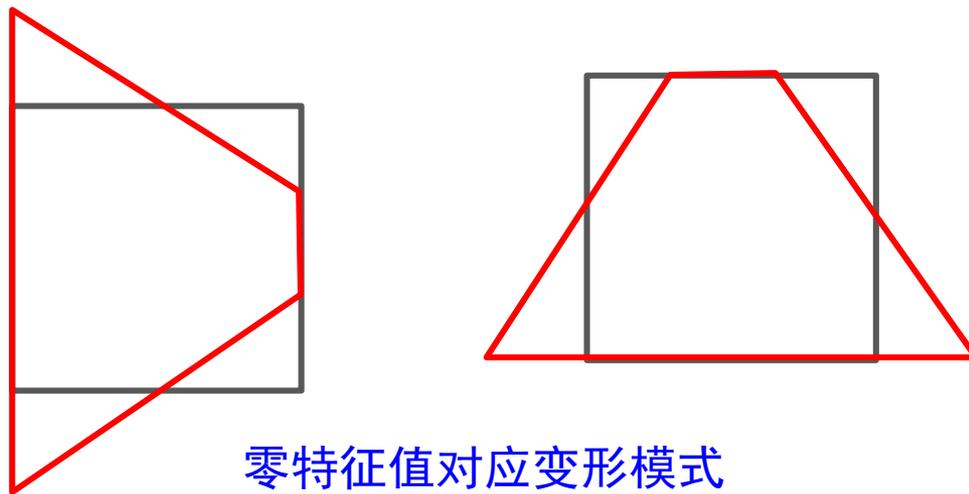


分析示例

秩亏 (Rank deficiency)

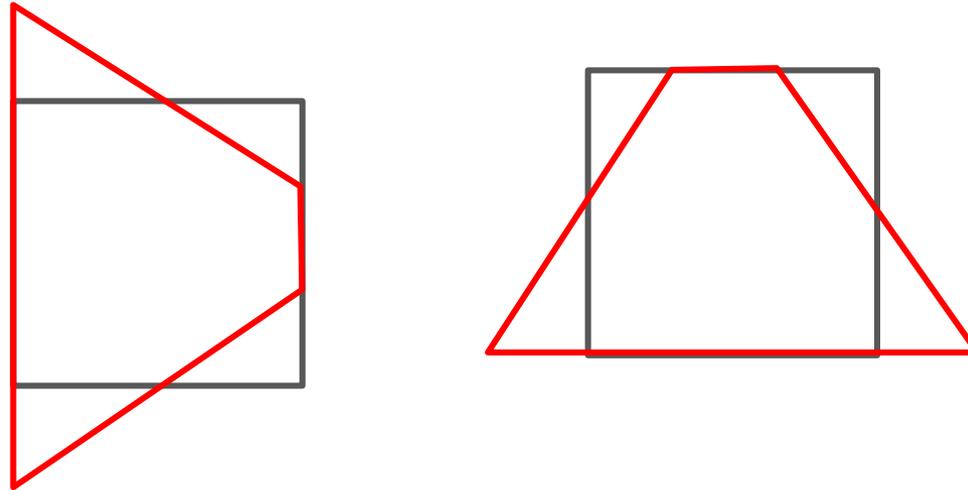
$$\text{Rank}(\mathbf{k}^e) = 3$$

除了刚体运动定义的三个零特征值，还有两个零特征值，其所对应的变形模式即为xy项，不产生应变能。且此类变形能在单元间无缝传播。



分析示例

秩亏 (Rank deficiency)



Anti-hourglass stiffness/damping

T. Belytschko, J.S.J. Ong, W.K. Liu, J.M. Kennedy. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 43 (1984), pp. 251–276



大作业一（须提交分析报告）

对于函数： $\phi(x, y) = \sin x \cos y$, $(x, y) \in [0, \pi/2] \otimes [0, \pi/2]$

完成以下计算。

1. 采用3节点、6节点三角形单元，4节点、8节点矩形单元，对函数进行插值，画出原函数-插值函数、原函数导数-插值导数的图形，并讨论计算结果。（插值网格取 1×1 , 2×2 , 5×5 , 三角形单元在矩形单元中采用对角线斜跨划分即可。）
2. 计算原函数插值和插值导数的2-范数误差，将误差-单元长度（E-h）曲线绘制在双对数坐标系中，观察和讨论计算所得曲线的性质。（至少变化5个单元长度，跨过3个长度量级，才可能得到稳定且有规律的结果。）

$$\|f - \hat{f}\|_2 = \left[\int_{\Omega} (f - \hat{f})^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

4月20日提交！



公共邮箱

地址: fem_tongji@163.com

密码: youxiandanyuanfa



今天就到这里，
明天的事儿明天再说！

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院

