有限元法研究生核心课程

第三讲 弹性力学平面问题的有限元流程

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院

弹性力学问题有限元流程概略

单元插值 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}$ $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{B}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}$

单元积分 $\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\mathbf{B}^e d\Omega$ $\mathbf{P}^e = \int_{\Gamma_s^e} \left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{b} d\Omega$

组装整体刚度矩阵、荷载向量 $\mathbf{K} = \mathop{\mathsf{A}}\limits_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^e$ $\mathbf{P} = \mathop{\mathsf{A}}\limits_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{P}^e$

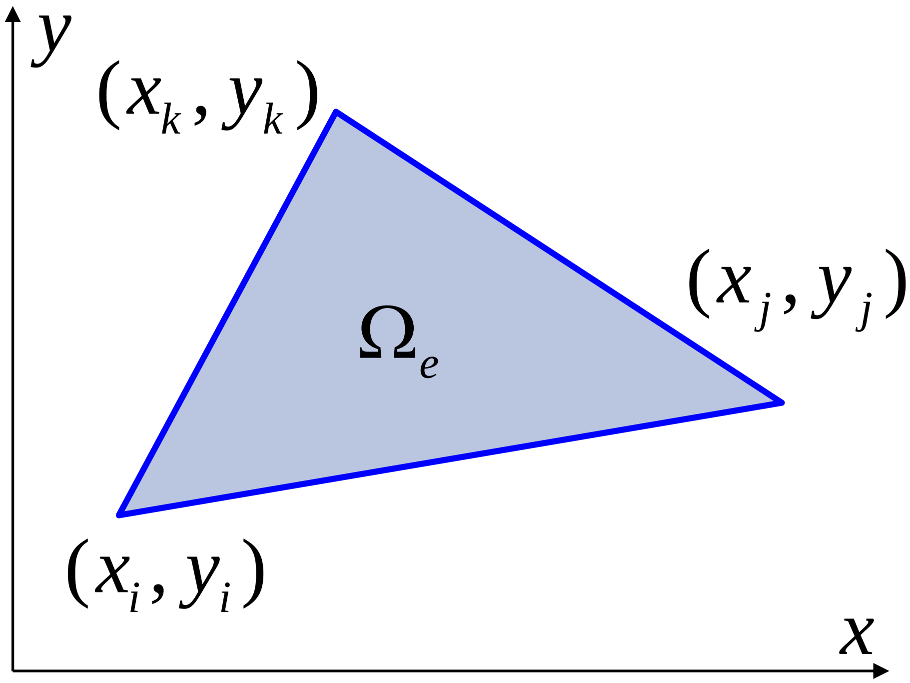
有限元直接刚度方程 $\mathbf{Kd} = \mathbf{P}$

考虑（边界）约束条件 $\underset{\sim}{\mathbf{K}}\underset{\sim}{\mathbf{d}} = \underset{\sim}{\mathbf{P}}$

线性方程求解 $\underset{\sim}{\mathbf{d}} = \underset{\sim}{\mathbf{K}}^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{P}}$

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

平面三角形单元



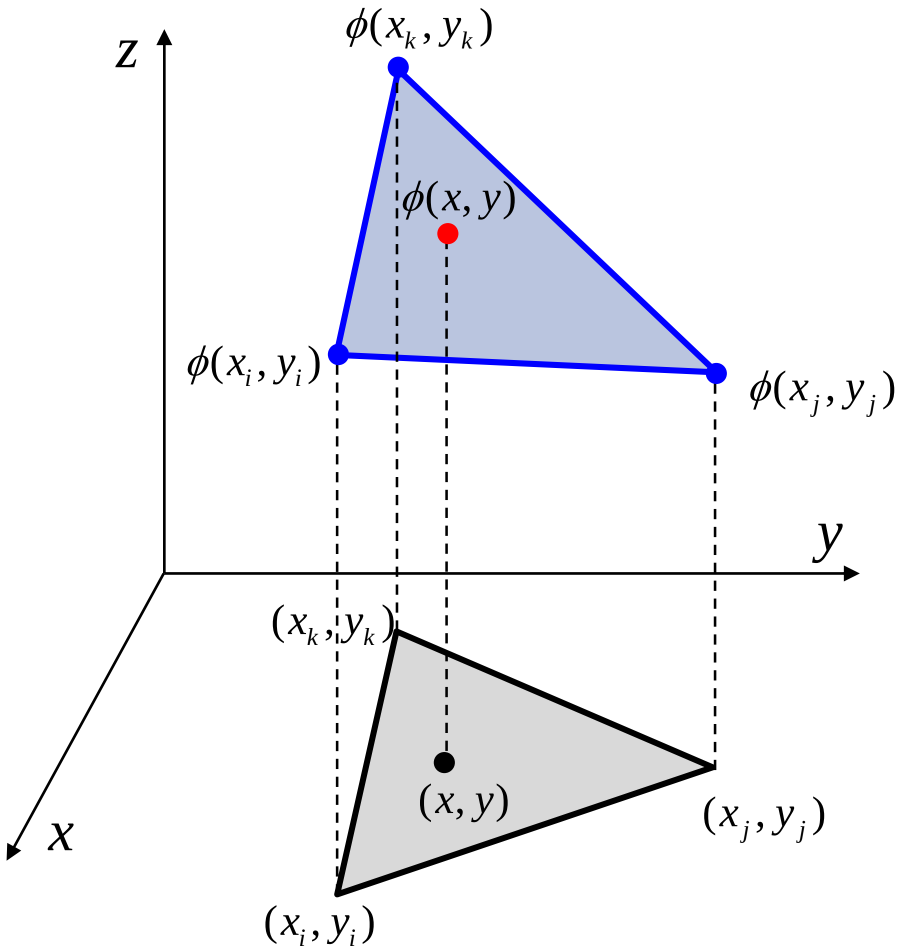
单元区域记为：Ω_e

三个节点编号：i、j、k

三个节点坐标：

(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)

平面三角形单元



已知：

(x_i, y_i) (x_j, y_j) (x_k, y_k)

$\phi(x_i, y_i)$ $\phi(x_j, y_j)$ $\phi(x_k, y_k)$

$\forall (x, y) \in \Omega_e$

估计： $\phi(x, y)$

平面三角形单元

$$\phi(x,y)=\beta_1+\beta_2 x+\beta_3 y$$

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2 x_i+\beta_3 y_i=\Phi_i\\ \beta_1+\beta_2 x_j+\beta_3 y_j=\Phi_j\\ \beta_1+\beta_2 x_k+\beta_3 y_k=\Phi_k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_1=\dfrac{1}{2A}\left(a_i\Phi_i+a_j\Phi_j+a_k\Phi_k\right)\\ \beta_2=\dfrac{1}{2A}\left(b_i\Phi_i+b_j\Phi_j+b_k\Phi_k\right)\\ \beta_3=\dfrac{1}{2A}\left(c_i\Phi_i+c_j\Phi_j+c_k\Phi_k\right)\end{cases}$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}a_i=x_j y_k-x_k y_j\\ b_i=y_j-y_k\\ c_i=-x_j+x_k\end{cases}\qquad (i,j,k)$$

平面三角形单元

$$\phi(x,y)=N_i(x,y)\Phi_i+N_j(x,y)\Phi_j+N_k(x,y)\Phi_k$$

其中：

$$\begin{cases} N_i(x,y)=\dfrac{1}{2A}\left(a_i+b_ix+c_iy\right) \\ N_j(x,y)=\dfrac{1}{2A}\left(a_j+b_jx+c_jy\right) \\ N_k(x,y)=\dfrac{1}{2A}\left(a_k+b_kx+c_ky\right) \end{cases}$$

Kronecker delta

$$N_i(x_j,y_j)=\delta_{ij}$$

Partition of unity

$$N_i(x,y)+N_j(x,y)+N_k(x,y)=1$$

土木工程学院

COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

平面三角形单元

位移向量：

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_i(x,y)u_i+N_j(x,y)u_j+N_k(x,y)u_k \\ N_i(x,y)v_i+N_j(x,y)v_j+N_k(x,y)v_k \end{bmatrix}=\mathbf{N}\mathbf{a}^e$$

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^e=\begin{bmatrix} u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

平面三角形单元

$$\begin{cases} N_i(x,y)=\dfrac{1}{2A}\left(a_i+b_ix+c_iy\right) \\ N_j(x,y)=\dfrac{1}{2A}\left(a_j+b_jx+c_jy\right) \\ N_k(x,y)=\dfrac{1}{2A}\left(a_k+b_kx+c_ky\right) \end{cases}$$

应变：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Lu}=\mathbf{LNa}^e=\mathbf{Ba}^e$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{LN}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_i & \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_k\end{bmatrix}$$

单元内应变为常数！

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

平面三角形单元

应力：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{DLu} = \mathbf{DBa}^e = \mathbf{Sa}^e$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{DB} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i & \mathbf{S}_j & \mathbf{S}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_i = \frac{E}{2(1-v^2)A} \begin{bmatrix} b_i & vc_i \\ vb_i & c_i \\ (1-v^2)c_i/2 & (1-v^2)b_i/2 \end{bmatrix} \quad (i, j, k)$$

上述表达式适用于平面应力问题；
平面应变问题只需对E和v进行代换即可。

平面三角形单元

单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}^e=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}tA=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_i\\ \mathbf{B}_j\\ \mathbf{B}_k\end{bmatrix}\mathbf{D}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_i & \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_k\end{bmatrix}tA$$

$$p,q=i,j,k$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ik}\\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jk}\\ \mathbf{K}_{ki} & \mathbf{K}_{kj} & \mathbf{K}_{kk}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{pq}=\mathbf{B}_p^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_q tA=\frac{Et}{4(1-v^2)A}\begin{bmatrix}K_1 & K_3\\ K_2 & K_4\end{bmatrix}$$

$$K_1=b_pb_q+\frac{1-v^2}{2}c_pc_q \quad K_2=vc_pb_q+\frac{1-v^2}{2}b_pc_q$$

$$K_3=vb_pc_q+\frac{1-v^2}{2}c_pb_q \quad K_4=c_pc_q+\frac{1-v^2}{2}b_pb_q$$

平面三角形单元

单元刚度矩阵：

对称性：来源于伽辽金法。

主元恒正：本质上也来源于伽辽金法。

奇异性：

存在节点位移向量使得： $\mathbf{K}\overline{\mathbf{a}}^{e}=\lambda\overline{\mathbf{a}}^{e}=0$

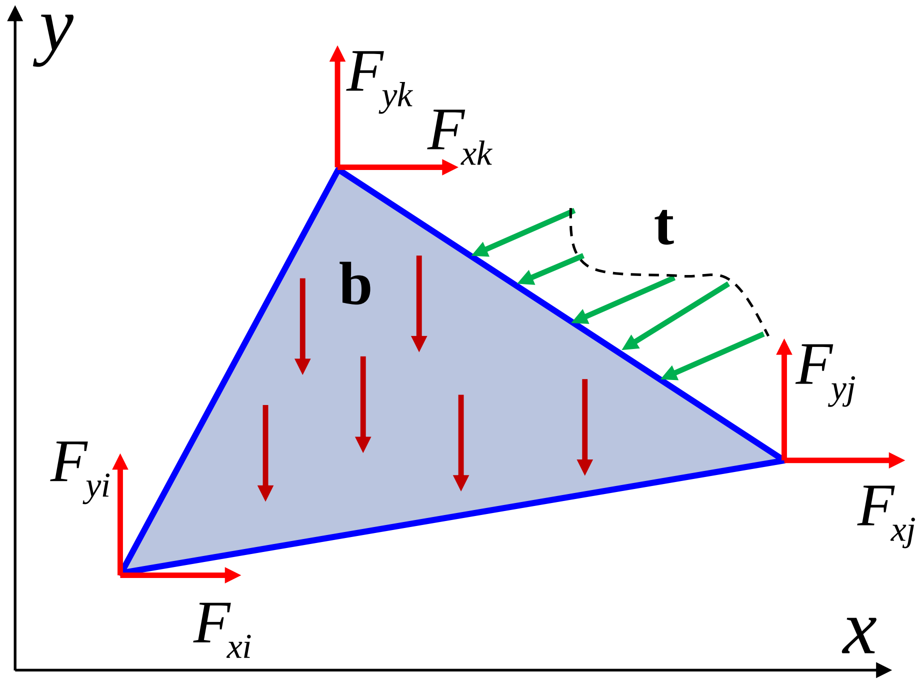
$$\Rightarrow \Pi_{pe}=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{a}}^{e}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\overline{\mathbf{a}}^{e}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\right)tA=0$$ 零能模式

刚体位移！

平面三角形单元

单元节点荷载向量：

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Gamma_s^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega$$



结构整体集成

刚度矩阵：

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^{e} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{G}^{e}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{e} \mathbf{G}^{e} \longleftarrow \text{转换矩阵}$$

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{G}^{e} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & k & \cdots & n_{nd} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{I} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

荷载向量：

$$\mathbf{P} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{P}^{e} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\mathbf{G}^{e}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^{e}$$

结构整体集成

刚度矩阵：

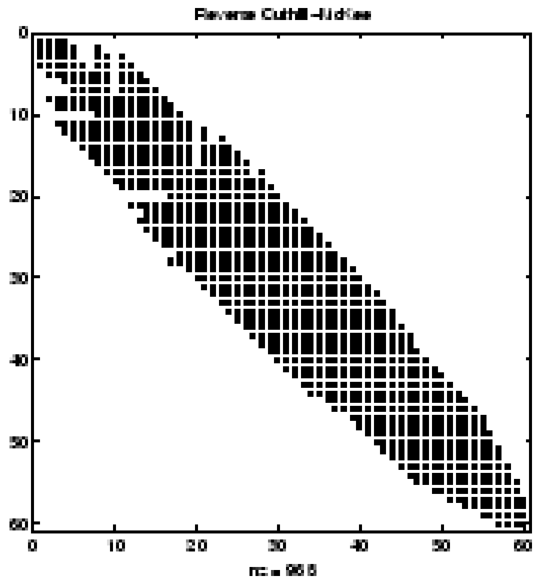
$$\left[\mathbf{G}^e\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^e\mathbf{G}^e=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{K}_{ii} & \cdots & \mathbf{K}_{ij} & \cdots & \mathbf{K}_{ik} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{K}_{ji} & \cdots & \mathbf{K}_{jj} & \cdots & \mathbf{K}_{jk} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{K}_{ki} & \cdots & \mathbf{K}_{kj} & \cdots & \mathbf{K}_{kk} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

荷载向量：$\left[\mathbf{G}^e\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^e=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \mathbf{P}_i^e & \cdots & \mathbf{P}_j^e & \cdots & \mathbf{P}_k^e & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

结构刚度矩阵的性质

对称性：来源于伽辽金法。



主元恒正：本质上也来源于伽辽金法。

奇异性：也有零能模式。

稀疏性：来源于单元之间的联通结构。

非零元素带状分布：来源于单元之间的联通结构。

位移（边界）约束条件

直接代入法： $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_a \\ \mathbf{a}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix}$

拉格朗日乘子法

$$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{a}_a = \mathbf{P}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{a}_b \Rightarrow \mathbf{a}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1}\left(\mathbf{P}_a - \mathbf{K}_{ab}\mathbf{a}_b\right)$$

置大数法：

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \alpha K_{jj} & \vdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha K_{jj}\bar{a}_j \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

罚函数法

置0-1法……

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

线性方程组求解

- 小型问题一般采用**直接法**，大型问题一般采用**间接法**。
- 小型问题主要利用矩阵的**正定性**，大型问题主要利用矩阵的**稀疏性**。
- 求解方法与存储方法往往密切相关。

有限元解的性质

系统势能： $\Pi_p = \dfrac{1}{2}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$

精确解满足： $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{P} \Rightarrow \Pi_p \Rightarrow \min \Pi_p$

$$\tilde{\Pi}_p \geq \Pi_p$$

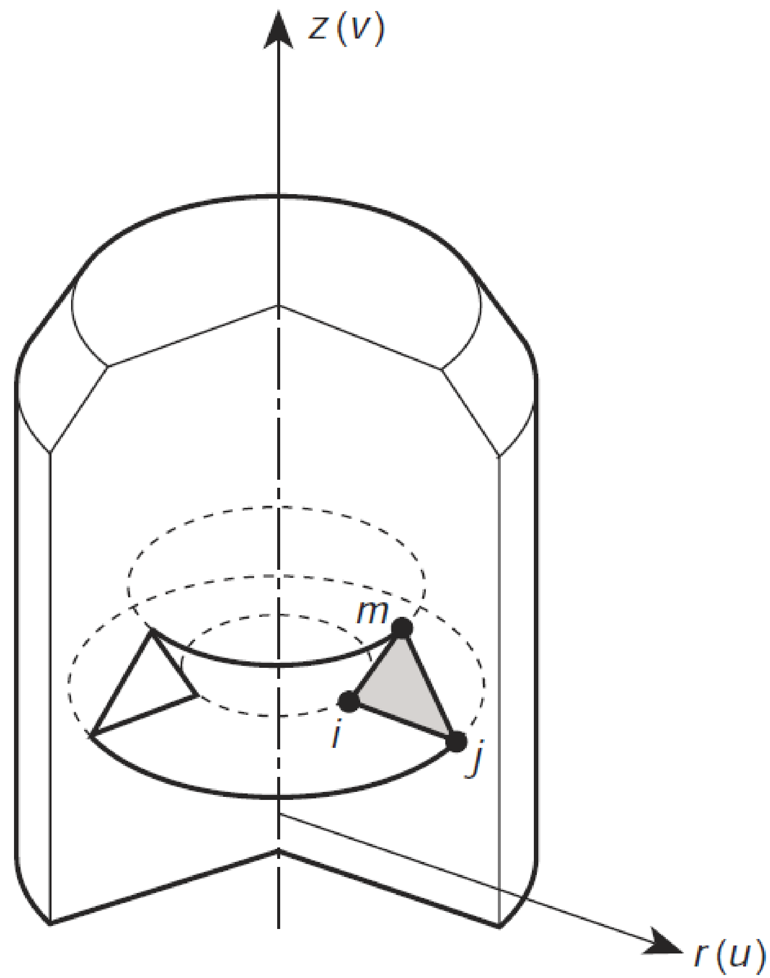
$$\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \geq \frac{1}{2}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \Leftarrow \begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{a} &= \mathbf{P} \\ \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{a}} &= \mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \leq \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$$

位移有限元的位移解整体上小于精确解，刚度整体上大于实际刚度。原因是有限元在离散过程中忽略了某些自由度，相当于施加了某些约束，从而使得整体响应偏刚。

轴对称问题



自己看，有问题讨论！

公共邮箱

地址：fem_tongji@163.com

密码：youxiandanyuanfa

作业

王勖成《有限单元法》

P97——2.12

下节课交，抽样批改，计入总分，考试题型。

土木工程学院

COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

今天就到这里，

明天的事儿明天再说！

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院