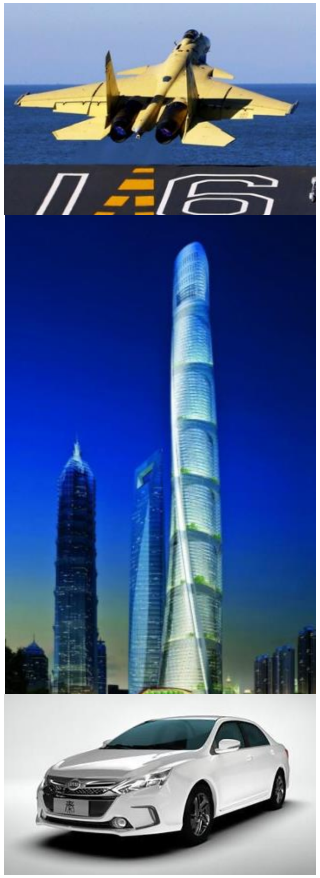
第一讲 绪论

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院



工程结构

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+b_x=0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+b_y=0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+b_z=0$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\gamma_{yx}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\gamma_{zy}$$

$$\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\gamma_{xz}$$

数学模型

$$\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega^e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega$$

$$=\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Gamma_s^e}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma+\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Omega^e}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega$$

$$\left\{\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}}\left[\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}^e\mathrm{d}\Omega\right]\right\}\mathbf{d}$$

$$=\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}}\left[\int_{\Gamma_s^e}\left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega\right]$$

$$\mathbf{K}=\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}}\mathbf{K}^e,\mathbf{K}^e$$

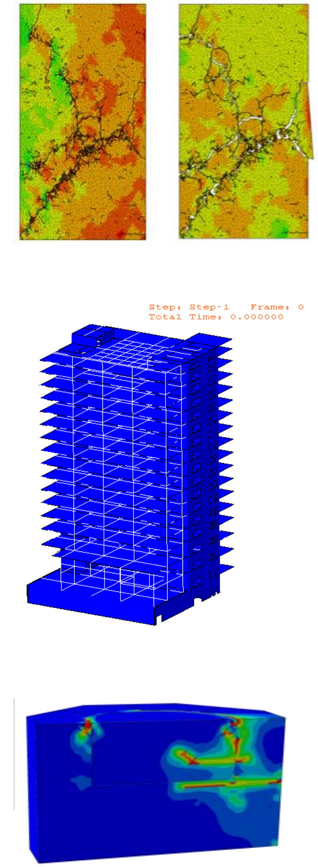
$$=\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{B}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}^e d\Omega$$

$$\mathbf{P}=\mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}}\mathbf{P}^e$$

$$\mathbf{P}^e=\int_{\Gamma_s^e}\left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\mathrm{d}\Gamma$$

$$+\int_{\Omega^e}\left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\mathrm{d}\Omega$$

计算方法



分析结果

本课程主要内容！

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

KEEP

CALM

AND

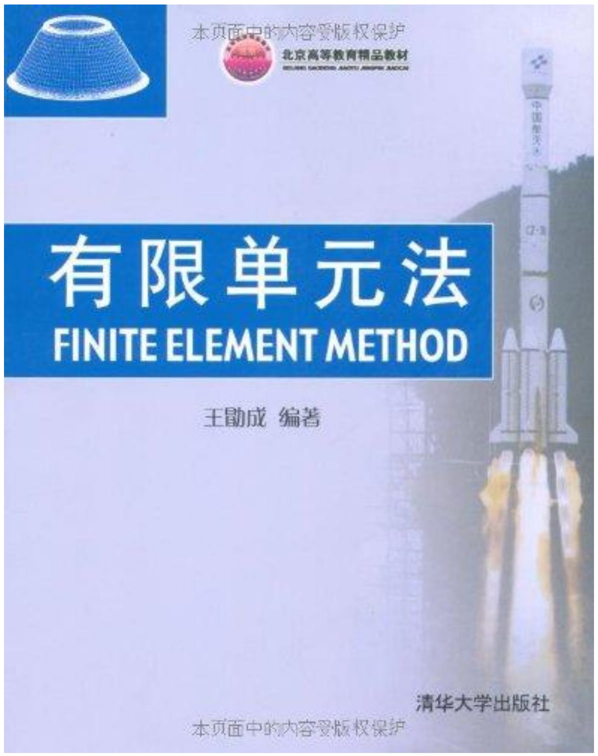
FOLLOW

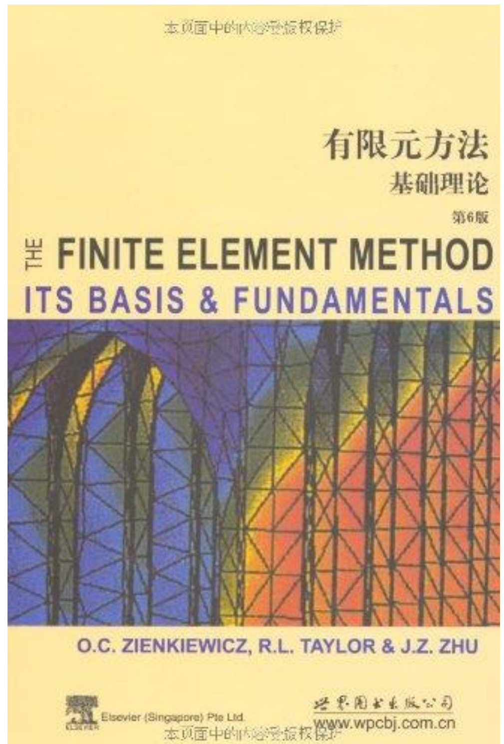
ME

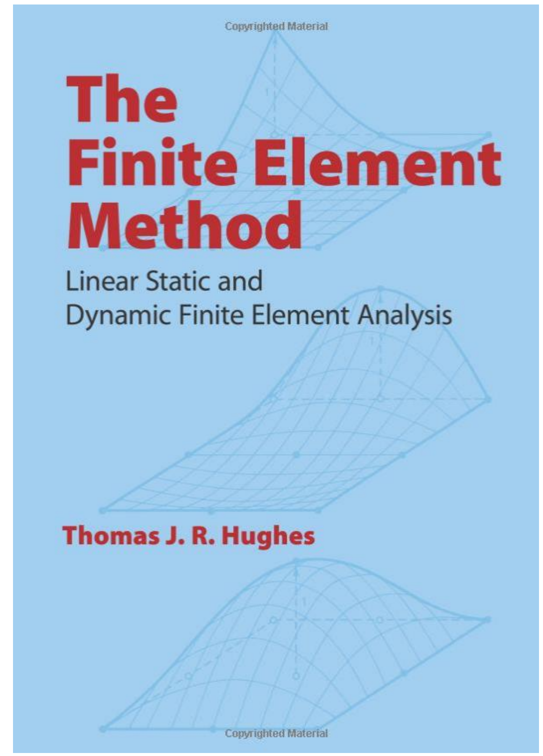
TONGJI UNIVERSITY 1907

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

参考书——基础篇

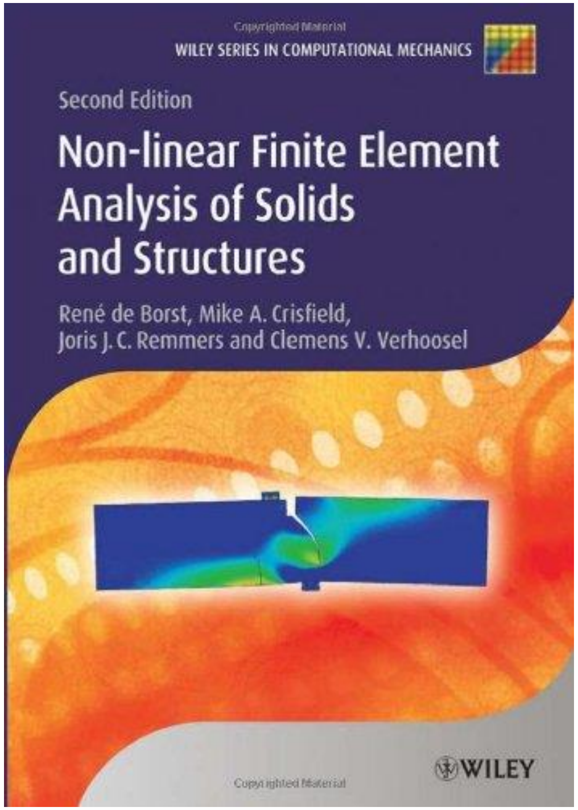


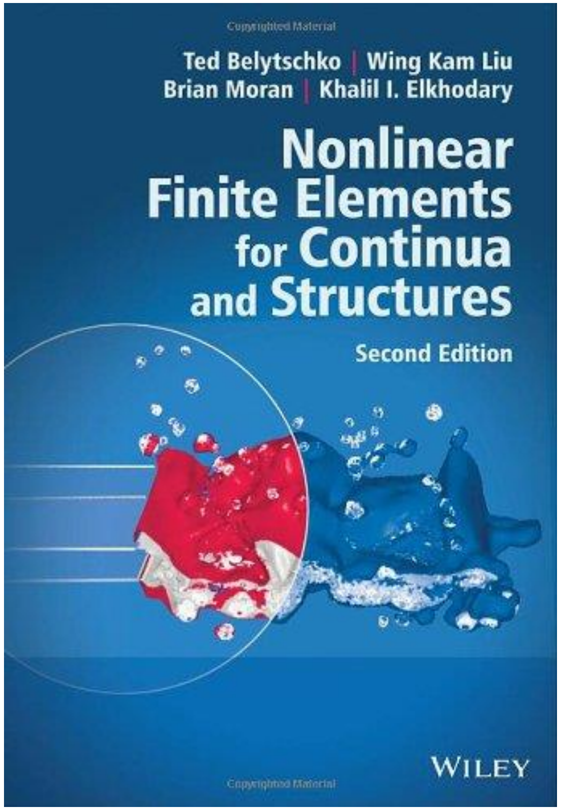


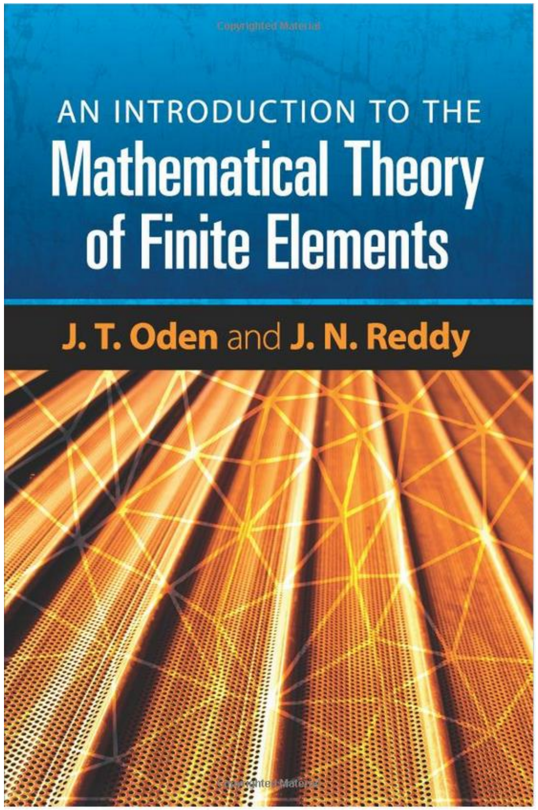


土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

参考书——高级篇



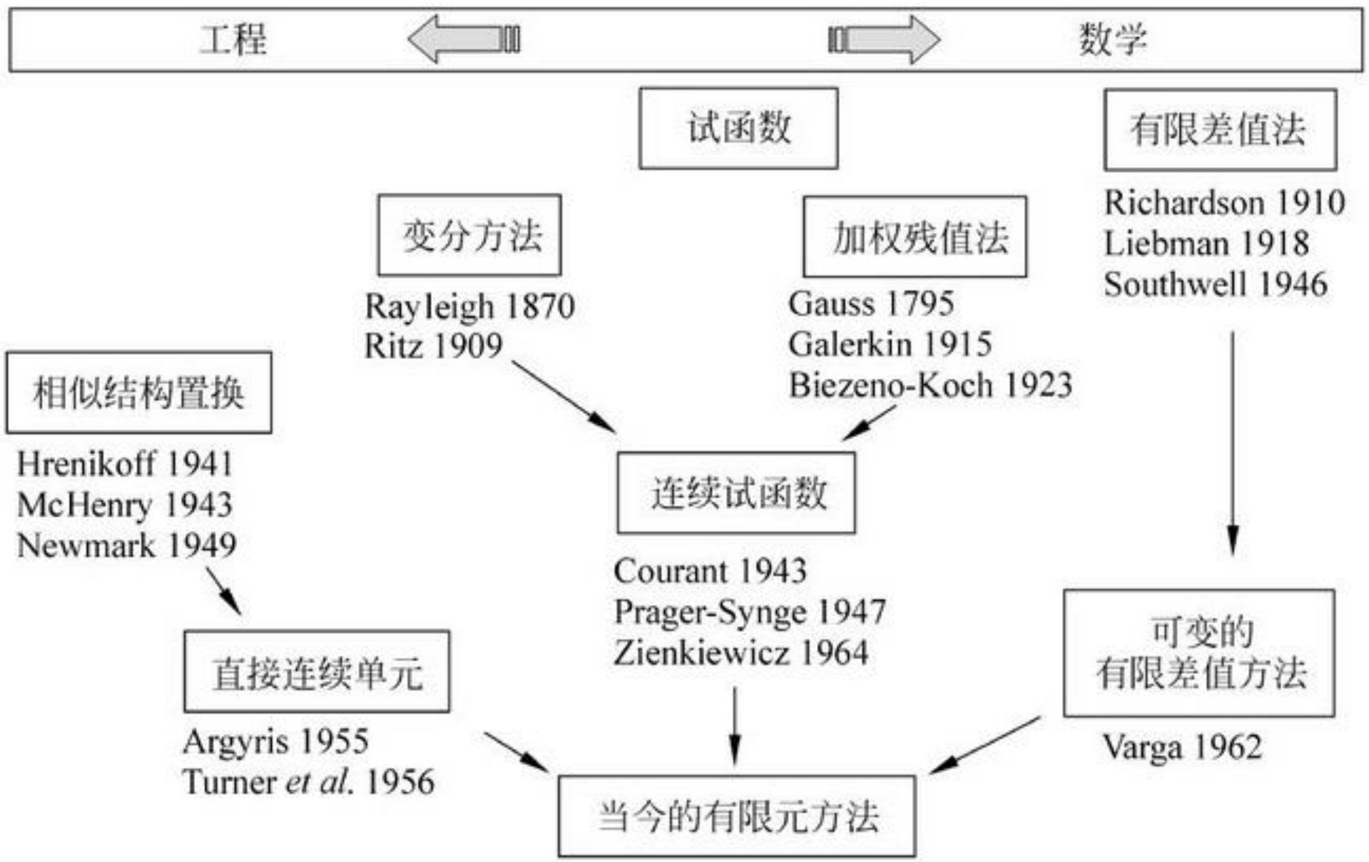




土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

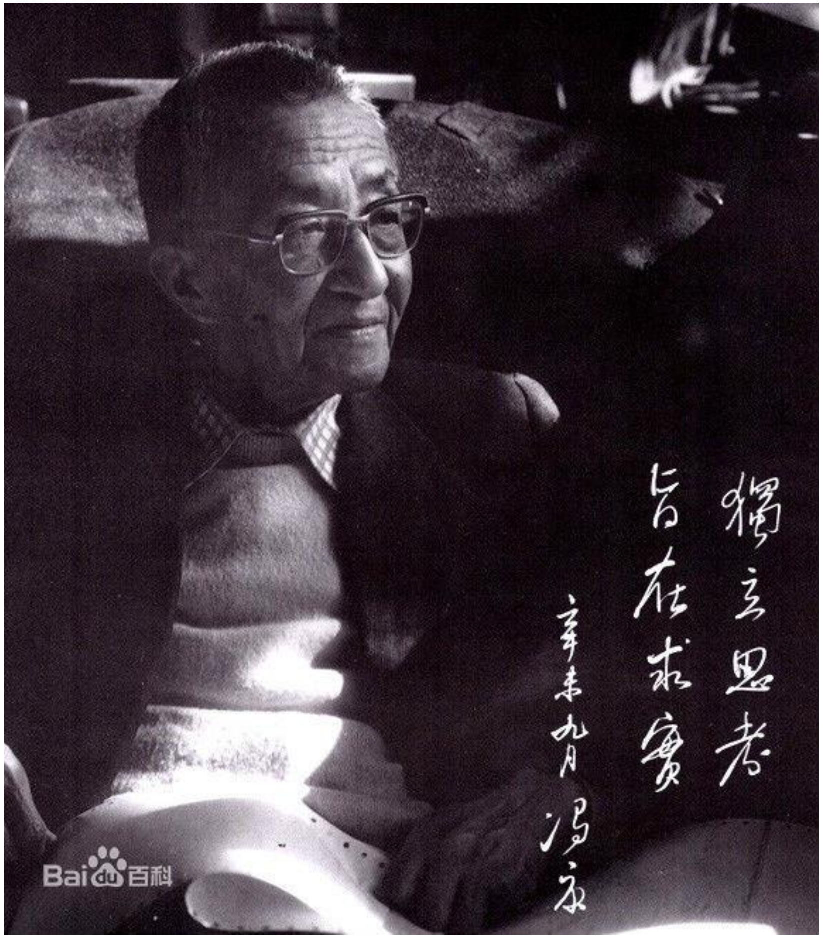
有限元法的历史

早期历史



工程
数学
试函数
有限差值法
Richardson 1910
Liebman 1918
Southwell 1946
变分方法
Rayleigh 1870
Ritz 1909
加权残值法
Gauss 1795
Galerkin 1915
Biezeno-Koch 1923
相似结构置换
Hrenikoff 1941
McHenry 1943
Newmark 1949
连续试函数
Courant 1943
Prager-Synge 1947
Zienkiewicz 1964
可变的
有限差值方法
Varga 1962
直接连续单元
Argyris 1955
Turner et al. 1956
当今的有限元方法

早期历史



冯康，数学家，应用数学和计算数学家，浙江绍兴人。中国现代计算数学研究的开拓者，独立创造了有限元方法，自然归化和自然边界元方法，开辟了辛几何和辛格式研究新领域，为组建和指导我国计算数学队伍做出了重大贡献，是世界数学史上具有重要地位的科学家。

冯康在有限元方面（冯康首次发现时称为基于变分原理的差分方法）的开创性工作被公认为是有限单元法的独立来源之一。

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

蓬勃发展

Year	Player	Program	Comments
1960	Ed Wilson	SAP→NONSAP	最早的成熟程序
1969	Pedro Marcal	MARC	最早的非线性有限元程序
1969	John Swanson	ANSYS	商业化最好，非线性不彻底
1972	David Hibbitt	ABAQUS	允许植入单元和材料
1970s	Klaus-Jürgen Bathe	ADINA	来源于NONSAP
1976	John Hallquist Bob Taylor Tom Huges Juan Simo Ted Belytschko	DYNA DYNA-3D LS-DYNA	显式有限元的代表作

新发展

Year	Player	Works	Comments
Late 1980s	Juan Simo	return-mapping algorithm	解决了非线性本构关系的求解问题
1990s	Ted Belytschko	Meshfree method	丢弃网格的有益探索
1990s	Ivo Babuška	Partition-of-unity	复杂插值函数引入的理论基础
Late 1990s	Ted Belytschko	XFEM	有限元框架内精细描述不连续场
2000s	Tom Hughes	Isogemometric FEM	几何模型与有限元模型的一体化

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

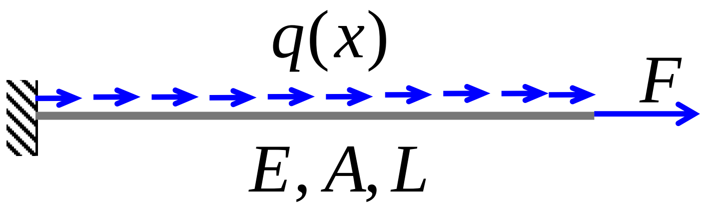
学术传承

Jiun-Shyan Chen教授
美国计算力学学会主席
（2010-2012）

Ted Belytschko

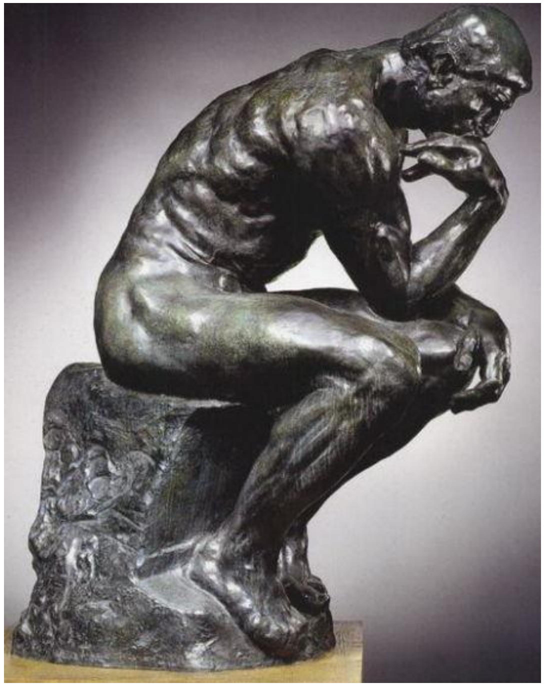
一维问题有限元分析示例

从一维受力杆开始



$$
\begin{cases}
EA\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q(x)=0 & \text{控制方程} \\[2ex]
u(0)=0 & \text{位移（本质）边界条件} \\[2ex]
EA\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}=F & \text{力（自然）边界条件}
\end{cases}
$$

如何求解方程的近似解？



1. 假设解的函数形式
2. 利用控制方程和边界条件做出修正
3. 得到方程的近似解

试函数（trial function）方法

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

试函数方法

弱化原方程的要求！

不能直接满足原微分方程！

$$EA\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \int_L w\left[EA\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\right]\mathrm{d}x=0$$

强形式！

$$u(x)=\sum_i c_i\varphi_i(x) \quad\Rightarrow\quad \int_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\int_L wq(x)\mathrm{d}x$$

弱形式！

采用虚功原理或者最小势能原理也可以得到同样的方程！

可以通过适当选取权函数使得试函数满足弱化的微分-积分方程！

土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

配点法

$$w_j = \delta(x - x_j) \Rightarrow \int_L w\left[EA\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + q(x)\right]\mathrm{d}x = 0$$

$$u(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x) \Rightarrow \left[EA\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + q(x)\right]_{x=x_j} = 0$$

配点法！

$$\sum_i \left[EA\frac{\mathrm{d}^2 \varphi_i}{\mathrm{d}x^2}\right]_{x=x_j} c_i + q(x_j) = 0 \qquad \begin{cases} \sum_i \left[EA\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x}\right]_{x=L} c_i = F \\ \sum_i c_i \varphi_i(0) = 0 \end{cases}$$

TONGJI UNIVERSITY 1907
土木工程学院
COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

伽辽金（GALERKIN）法

$$w_j = \varphi_j(x)$$

$$u(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x)$$

$$\Rightarrow \int_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} EA \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = w(L)F + \int_L wq(x)\mathrm{d}x$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_i \left[\int_L \frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}x} EA \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \right] c_i = \varphi_j(L)F + \int_L \varphi_j q \mathrm{d}x$$

土木工程学院

COLLEGE OF CIVIL ENGINEERING

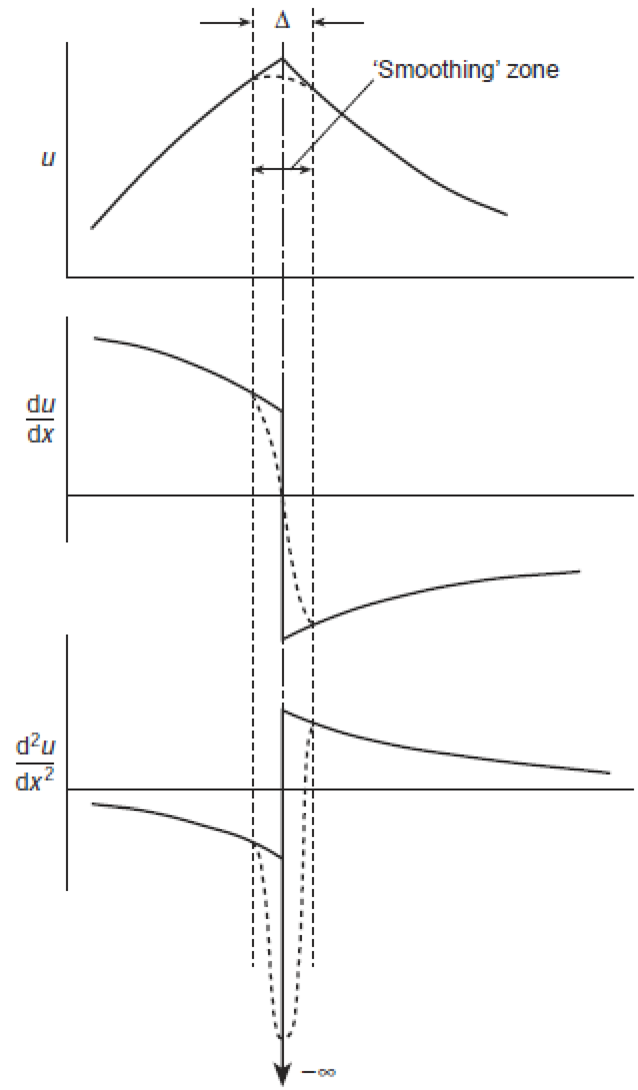
连续性

$$EA\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+q(x)=0$$

Vs

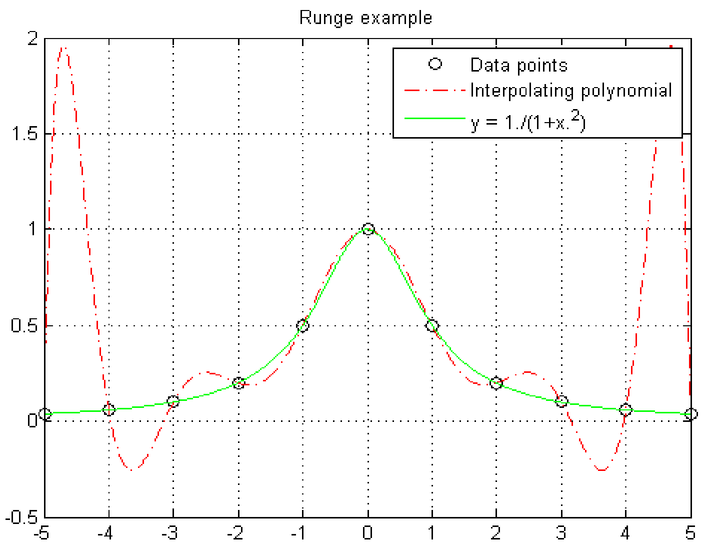
$$\int_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=w(L)F+\int_L wq(x)\mathrm{d}x$$

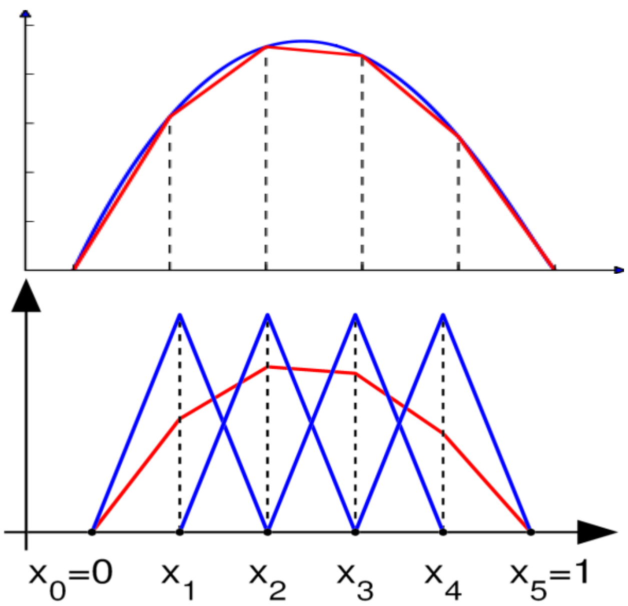


复杂解的逼近

$$u(x)=\sum_i c_i \varphi_i(x)$$

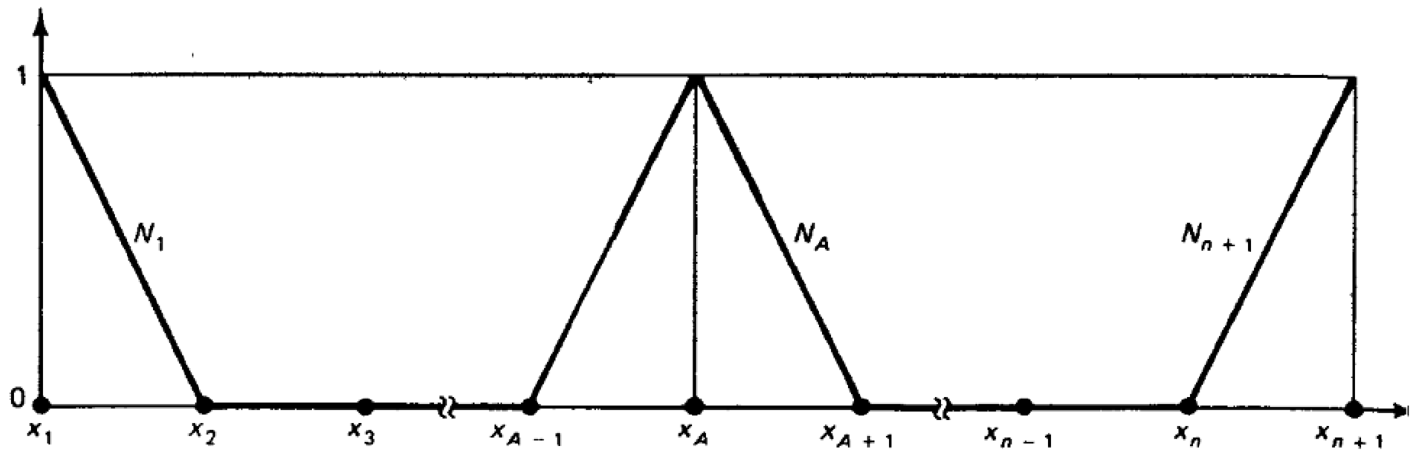


全局高阶逼近



分段低次逼近

分段线性插值函数



n个区间，n+1个节点

$$u(x)=\sum_{A=1}^{n+1} N_A(x)\hat{u}_A$$

$$N_A(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-x_{A-1})}{h_{A-1}}, & x_{A-1} \le x \le x_A \\ \dfrac{(x_{A+1}-x)}{h_A}, & x_A \le x \le x_{A-1} \\ 0 \quad, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$N_1(x)=\frac{x_2-x}{h_1}, \qquad x_1 \le x \le x_2$$

$$N_{n+1}(x)=\frac{x-x_n}{h_n}, \qquad x_n \le x \le x_{n+1}$$

代入弱形式

$$u(x)=\sum_{A=1}^{n+1} N_A(x)\hat{u}_A$$

$$w(x)=\sum_{B=1}^{n+1} N_B(x)\hat{w}_B$$

$$\int_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} EA \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = w(L)F + \int_L wq(x)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{B=1}^{n+1} \hat{w}_B \left\{ \left[\int_L \frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}x} EA \sum_{A=1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \right] \hat{u}_A \right\} = \sum_{B=1}^{n+1} \hat{w}_B N_B(L)F + \sum_{B=1}^{n+1} \hat{w}_B \int_L N_B(x)q(x)\mathrm{d}x$$

权系数的任意性

$$\left[\int_L \frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}x} EA \sum_{A=1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \right] \hat{u}_A = N_B(L)F + \int_L N_B(x)q(x)\mathrm{d}x$$

从节点到单元

$$\left[\int_L \frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}x} EA \sum_{A=1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\hat{u}_A = N_B(L)F + \int_L N_B(x)q(x)\mathrm{d}x \Rightarrow K_{AB}\hat{u}_A = P_B$$

$$\sum_{A=1}^{n+1}\int_L \frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}x} EA \frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{A=1}^{n+1}\int_{L_{AB}} \frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}x} EA \frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

L_{AB}为$N_A \times N_B$不为0的 区段！

由于节点插值函数的局部性，L_{AB}必为相邻或者相近节点的区段，此段称为单元。

由此可见单元的实质是一种数据组织方式！

有限单元法！

公共邮箱

地址：fem_tongji@163.com

密码：youxiandanyuanfa

今天就到这里，

明天的事儿明天再说！

任晓丹

rxdtj@tongji.edu.cn

同济大学土木工程学院