

实体结构（连续体）分析

损伤力学基础研究生课程之十二

任晓丹

同济大学建筑工程系

September 29, 2017

本节主要内容

- ① 一般结构初边值问题有限元法
 - 初边值问题的控制方程
 - 初边值问题的有限元列式及求解
- ② 应变局部化问题
 - 软化材料与应变局部化
 - 数值分析结果的病态
- ③ 材料非局部本构关系
 - 非局部理论的基本概念
 - 非局部损伤模型
 - 积分型非局部损伤模型

控制方程的强形式

- 几何方程

$$\epsilon(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) + \nabla^T \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \right] = \nabla^s \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$$

- 本构关系

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} [\epsilon(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}, t)]$$

- (动力) 平衡方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b}^* = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} + \eta \dot{\boldsymbol{u}}$$

控制方程的强形式

- 自然边界条件

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}^*(\boldsymbol{x}, t) \quad \boldsymbol{x} \in \partial_t \Omega$$

- 本质边界条件

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}, t) \quad \boldsymbol{x} \in \partial_u \Omega$$

- 初始条件

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}, 0), \quad \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{u}}^*(\boldsymbol{x}, 0) \quad \boldsymbol{x} \in \partial_u \Omega$$

控制方程的弱形式

利用最小势能（余能）原理、变分原理、Galerkin 方法等，均可以建立控制方程的积分表达形式，即弱形式。一个较为完备的弱形式表达式如下：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \eta \dot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \end{aligned}$$

为什么要引入弱形式？

有限元控制方程

- 将计算域 Ω 离散为有限个 (记为 n_{el}) 单元 Ω_e

$$\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{n_{\text{el}}} \Omega_e, \quad \partial\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{n_{\text{el}}} (\partial_t \Omega_e \cup \partial_u \Omega_e)$$

- 单元 Ω_e 位移场 $u(x, t)$ 的 (等参单元) 插值

$$u(x, t) \approx u[x(\xi), t] = \sum_{A=1}^{n_p} N_A(\xi) d_A(t) = N(\xi) d(t)$$

- 单元应变场 $\epsilon(x, t)$

$$\epsilon(x, t) \approx \sum_{A=1}^{n_p} B_A(x) d_A(t) = B(x) d(t)$$

有限元控制方程

将上述插值格式代入平衡方程弱形式，考虑单元节点虚位移 δd 的任意性，可以得到如下固体结构的有限元控制方程：

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + f^{\text{int}} = f^{\text{ext}}$$

- 一致质量矩阵 M

$$M = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \rho N^T N \, d\Omega$$

- 阻尼系数矩阵 C

$$C = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} \eta N^T N \, d\Omega$$

有限元控制方程

将上述插值格式代入平衡方程弱形式，考虑单元节点虚位移 δd 的任意性，可以得到如下固体结构的有限元控制方程：

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + f^{\text{int}} = f^{\text{ext}}$$

- 内力列向量 f^{int}

$$f^{\text{int}} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega_e} B^T \sigma \, d\Omega$$

- 外力列向量 f^{ext}

$$f^{\text{ext}} = \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \left(\int_{\Omega_e} \rho N^T b^* \, d\Omega + \int_{\partial_t \Omega_e} N^T t^* \, dS \right)$$

单元积分

- 等参元换元积分

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\bar{\Omega}_e} f(\boldsymbol{\xi}) \, |\mathbf{J}| \, d\bar{\Omega}_e$$

其中雅可比行列式

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$$

- 高斯积分

$$\int_{\bar{\Omega}_e} f(\boldsymbol{\xi}) \, |\mathbf{J}| \, d\bar{\Omega}_e \approx \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} f(\boldsymbol{\xi}_i) \, |\mathbf{J}| \, w_i$$

时域离散

- 如下控制方程的系数均已求得，需进一步考虑其时域离散求解

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + f^{\text{int}} = f^{\text{ext}}$$

- 将时间步 $[0, T]$ 离散为 M 个时间增量步

$$[0, T] = \bigcup_{n=1}^M [t_n, t_{n+1}]$$

- 若不考虑动力效应，则静力平衡方程可以在每个时间点上直接求解

$$R_n = f_n^{\text{ext}} - f^{\text{int}}(\sigma_n) = 0$$

时域离散

动力方程的完全求解一般基于时域动力积分算法，其中 Newmark 法应用最为广泛，基于考虑如下三段式 Newmark 法表达式形式，建立结构非线性代数方程：

- 预估

$$\begin{cases} \tilde{d}_{n+1} = d_n + v_n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta) a_n \\ \tilde{v}_{n+1} = v_n + (1 - \gamma) a_n \Delta t \end{cases}$$

- 求解

$$(M + \gamma \Delta t C) a_{n+1} + \beta \Delta t^2 \mathbf{f}^{\text{int}}(d_{n+1}) = f_{n+1}^{\text{ext}} - C \tilde{v}_{n+1} - \mathbf{f}^{\text{int}}(\tilde{d}_{n+1})$$

- 校正

$$\begin{cases} d_{n+1} = \tilde{d}_{n+1} + \beta \Delta t^2 a_{n+1} \\ v_{n+1} = \tilde{v}_{n+1} + \gamma \Delta t a_{n+1} \end{cases}$$

非线性方程求解

以静力方程为例:

- 在 t_n 时刻各状态量一致且满足力平衡条件

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}_n) = \mathbf{0}$$

- 确定该增量步结束时刻 t_{n+1} 时的节点位移 $\mathbf{d}_{n+1}$ 或相应的位移增量 $\Delta \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n$, 使得

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathbf{0}$$

- 考虑非线性方程解法的局部收敛性, 以前一步的结果作为本步迭代起点的逐步求解法得到了广泛应用。

N-R 方法

- 平衡方程 Taylor 级数展开并略去二阶以上的高阶项

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{d}} \right|_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{K}^{\text{tan}}|_{n+1}^{(k)} \delta \mathbf{d}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{0}$$

- 结构切线刚度矩阵

$$\mathbf{K}^{\text{tan}}|_{n+1} = -\frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \mathbf{K}_e^{\text{tan}}|_{n+1}$$

- 单元切线刚度矩阵

$$\mathbf{K}_e^{\text{tan}}|_{n+1} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \mathbf{B} \mathrm{d}\Omega$$

N-R 方法

- 迭代的初始值 $d_{n+1}^{(0)}$ 取为上一增量步结束后的节点位移 d_n

$$d_{n+1}^{(0)} = d_n$$

- 求解第 $k+1$ 步迭代结束后的节点位移 $d_{n+1}^{(k+1)}$

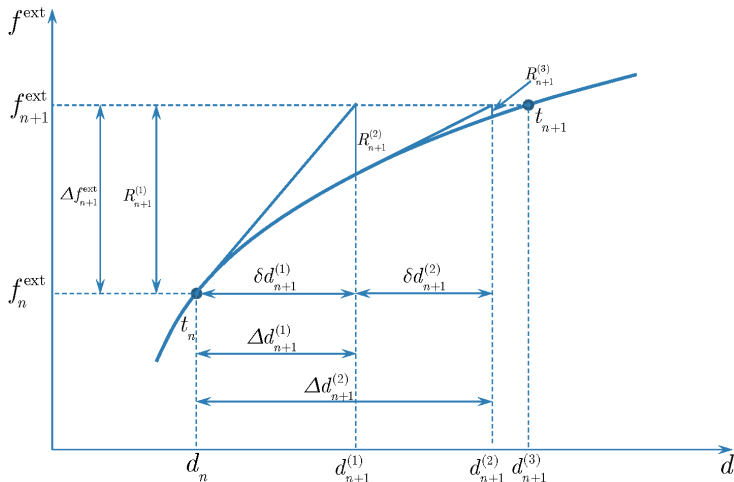
$$d_{n+1}^{(k+1)} = d_{n+1}^{(k)} + \delta d_{n+1}^{(k)} = d_n + \Delta d_{n+1}^k$$

- 其中 Δd_{n+1}^k 表示第 $k+1$ 步迭代结束后的节点位移增量

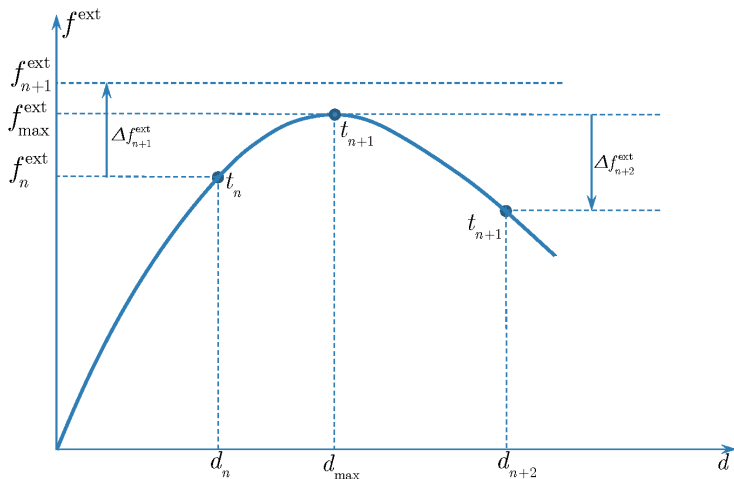
$$\Delta d_{n+1}^{(k)} = d_{n+1}^{(k)} - d_n = \sum_{j=1}^k \delta d_{n+1}^{(j)}$$

- 判断收敛之后即停止迭代，得到数值解。

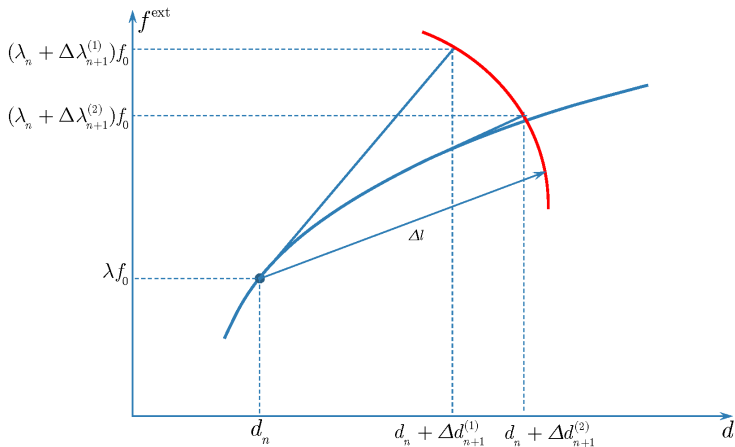
N-R 方法



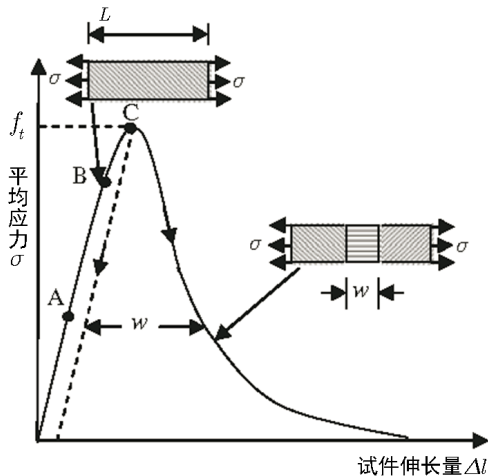
负刚度问题



弧长法



软化材料的应变局部化



一维波动方程示例

- 动力平衡方程

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- 代入应力应变关系

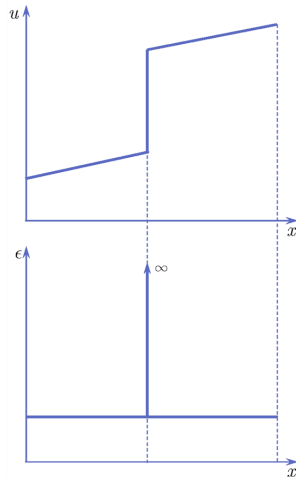
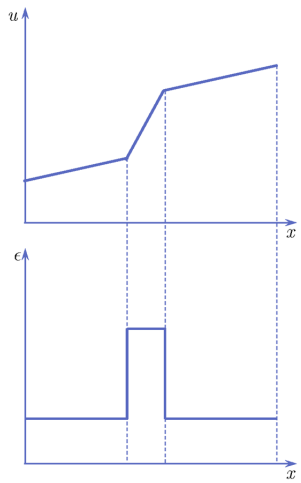
$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = E^{\text{tan}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 一维波动方程和静力方程

$$E^{\text{tan}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad E^{\text{tan}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

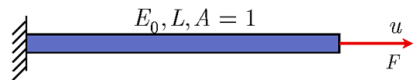
- Loss of ellipticity

不连续性

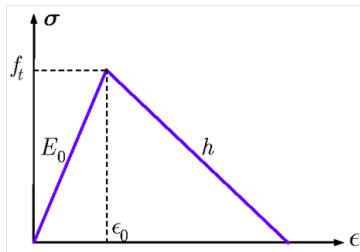


应变（弱）不连续性与位移（强）不连续性

数值分析结果的病态



一维受拉杆



线性软化（一维）本构关系

一维示例

数值分析结果的病态

- 本构关系表达式

$$\sigma = \begin{cases} E_0 \epsilon & \epsilon \leq \epsilon_0 \\ f_t + h(\epsilon - \epsilon_0) & \epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_f \\ 0 & \epsilon \geq \epsilon_f \end{cases}$$

- 沿杆全长将其离散为 n 个长度相等的单元，在未开裂线弹性阶段，在应力 $\sigma = F/A$ 作用下，根据变形协调关系有：

$$\frac{\sigma}{E_0} L = u \quad \Rightarrow \quad \sigma = E_0 \frac{u}{L} = E_0 \bar{\epsilon} \quad 0 \leq \bar{\epsilon} \leq \epsilon_0$$

数值分析结果的病态

- 某个单元受拉开裂后，应变局部化导致杆件变形集中于开裂单元，而其他 $n - 1$ 个未开裂单元则为线弹性，相应的变形协调关系为：

$$\frac{n-1}{n}L \cdot \frac{\sigma}{E_0} + \frac{1}{n}L \cdot \left(\frac{f_t}{E_0} + \frac{\sigma - f_t}{h} \right) = u$$

- 整理得应力 $\sigma = F/A$ 与平均应变 $\bar{\epsilon} = u/L$ 之间的关系为：

$$\sigma = \frac{f_t(E_0 - h) + nE_0h\bar{\epsilon}}{E_0 + (n-1)h} \quad \epsilon_0 \leq \bar{\epsilon} \leq \frac{1}{n}\epsilon_f$$

- 最后开裂单元完全丧失承载力，杆件破坏为两部分，即

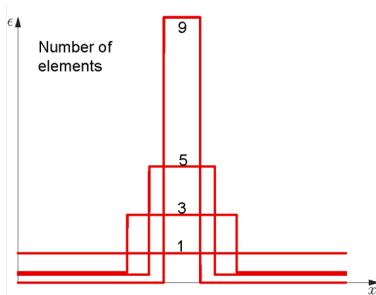
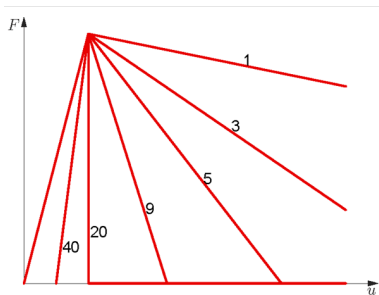
$$\sigma = 0 \quad \bar{\epsilon} \geq \frac{1}{n}\epsilon_f$$

数值分析结果的病态

- 最终得荷载位移关系

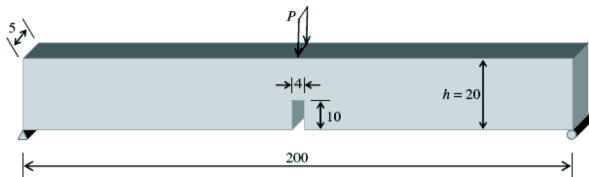
$$F(u) = \sigma \cdot A = \begin{cases} \frac{E_0 A}{L} u & 0 \leq u \leq L\epsilon_0 \\ \frac{E_0 A}{L} \cdot \frac{(E_0 - h)L\epsilon_0 + nhu}{E_0 + (n-1)h} & L\epsilon_0 \leq u \leq \frac{1}{n}L\epsilon_f \\ 0 & u \geq \frac{1}{n}L\epsilon_f \end{cases}$$

数值分析结果的病态

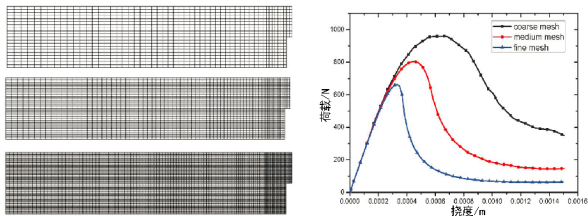


上述结果与有限元大小有关，且
不随着单元的减小而收敛！

数值分析结果的病态



(a) 几何尺寸、加载条件和边界条件



(b) 有限元网格和荷载—挠度曲线

图 11.3.5 三点弯曲缺口梁的有限元分析

为什么要研究非局部 (Nonlocal) 理论 ?

Nonlocal 理论提出和发展的内在动力 (Bazant 2002):

- 材料细观结构的考量

- 细观结构的非均匀性与宏观分析的均匀化 (Eringen)
- 裂纹的产生、发展以及裂纹的相互作用 (Bazant and de Borst)
- 位错和位错密度的影响 (金属材料) (Hutchinson)
- (伪) 脆性材料破坏的极值性 (Bazant)

- 应变软化与应变局部化的考量

- 当材料进入软化段以后, 会导致结构出现显著的变形集中, 使得整个数值系统变得不稳定 (loss of ellipticity), 而 Nonlocal 模型可以使得模拟计算变得稳定, 甚至 recovery of ellipticity.

积分型非局部化理论

- 积分型非局部材料模型的基本思想是将与材料本构关系有关的物理量在一定空间内进行加权平均

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \int_V \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

- $\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 是平均化权函数, 满足如下归一化条件

$$\int_V \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = 1 \quad \forall \boldsymbol{x} \in V$$

- 对局部应变张量 $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x})$ 进行非局部化

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{x}) = \int_V \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

- 若假定应力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ 与非局部应变 $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{x})$ 之间满足线弹性关系

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{E}_0 : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{x})$$

梯度型非局部化理论

- 将局部变量 $f(\xi)$ 在位置 x 进行 Taylor 展开

$$f(\xi) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (\xi - x) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(x) \cdot (\xi - x)^2 + \dots$$

- 代入积分表达式，可得

$$\tilde{f}(x) = f(x) + c \nabla^2 f(x) + d \nabla^4 f(x)$$

c 和 d 与相关函数 $\alpha(x, \xi)$ 有关，是材料特征尺度的度量。

- 若仅保留二阶梯度项，可得到常见的显式非局部梯度模型：

$$\tilde{f}(x) = f(x) + c \nabla^2 f(x)$$

梯度型非局部化理论

- 上述显式非局部梯度模型要求给出局部变量的二阶梯度，其有限元插值格式的构造需要高阶连续（至少 C^1 连续）插值函数，这给模型的有限元实现带来了困难。为此，一般将其转化为如下非局部隐式梯度模型

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) - c\nabla^2\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

- 同时还需要补充自然边界条件

$$\nabla\tilde{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

- 研究表明，随着网格的加密上述非局部模型有时并不能保证完全消除网格敏感性，为此提出了如下改进的非局部材料模型（over-nonlocal）

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = m\tilde{\tilde{f}}(\mathbf{x}) + (1 - m)f(\mathbf{x})$$

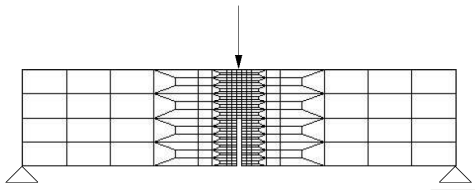
积分型非局部损伤模型

Bazant 总结的常用 Nonlocal 损伤模型列表

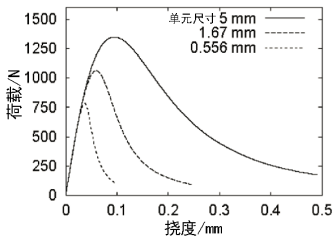
Table 1. Overview of Nonlocal Damage Formulations

Formation	Isotropic damage model	General model
$\omega(\bar{\varepsilon})$	$\sigma = [1 - \omega(\bar{Y\varepsilon})] D_e \varepsilon$	$\sigma = D_s(\bar{\varepsilon}) \varepsilon$
$\bar{Y}$	$\sigma = [1 - \omega(\bar{Y\varepsilon})] D_e \varepsilon$	$\sigma = \overline{D_s(\Omega(\bar{Y(\varepsilon)}))} \varepsilon$
$\bar{\varepsilon}$	$\sigma = [1 - \omega(\bar{Y\varepsilon})] D_e \varepsilon$	$\sigma = \overline{D_s(\varepsilon)} \varepsilon$
$\bar{\gamma}$	$\sigma = [1 + \overline{\gamma(Y\varepsilon)}]^{-1} D_e \varepsilon$	$\sigma = [C_e + \overline{C_e(\varepsilon)}]^{-1} \varepsilon$
$\bar{s}$	$\sigma = D_e \varepsilon - \omega(\varepsilon) \overline{D_e \varepsilon}$	$\sigma = D_e \varepsilon - \overline{s(\varepsilon)}$
$\Delta \bar{s}$	$\dot{\sigma} = (1 - \omega) D_e \dot{\varepsilon} - \dot{\omega} \overline{D_e \varepsilon}$	$\sigma = D_u \dot{\varepsilon} - \overline{\dot{s}(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}$
$s(\bar{\varepsilon})$	$\sigma = D_e \varepsilon - \omega(\bar{\varepsilon}) \overline{D_e \varepsilon}$	$\sigma = D_e \varepsilon - s(\bar{\varepsilon})$

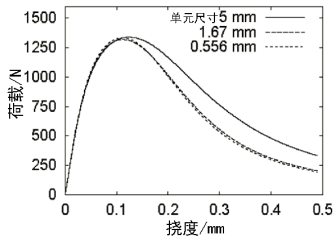
积分型非局部损伤模型



(a) 三点弯曲梁有限元网格离散



(b) 局部损伤模型数值计算结果



(c) 非局部损伤模型数值计算结果

隐式梯度损伤模型

- 选择将局部损伤能释放率 $Y(\mathbf{x})$ 进行隐式梯度非局部化，即

$$\begin{cases} \tilde{Y}(\mathbf{x}) - c \nabla^2 \tilde{Y}(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x}) \\ \nabla \tilde{Y}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

- 考察一维隐式梯度损伤模型对波动方程

$$\begin{cases} \sigma = (1 - d) E_0 \epsilon \\ d = \hat{d}(\tilde{Y}) \end{cases}$$

隐式梯度损伤模型

- 由梯度损伤能释放率方程可得

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \epsilon} = 1 + c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \epsilon} \right)$$

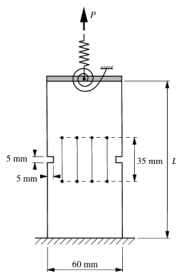
- 求解可得

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \epsilon} = 1 - 2 \cosh^{-1} \left(\frac{L}{2} \sqrt{1/cx} \right) \leq 0$$

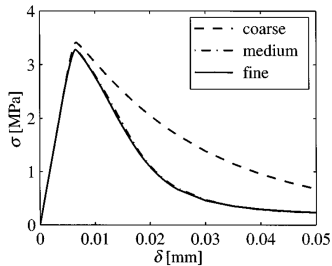
- 最终可解得隐式梯度损伤模型的切线模量

$$E^{\text{tan}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = (1 - d) E_0 - E_0 \epsilon \frac{\partial d}{\partial \tilde{Y}} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \epsilon}$$

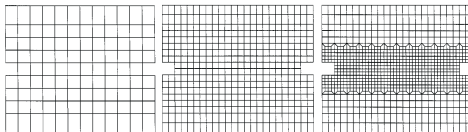
梯度非局部损伤模型



(a) 直接拉伸构件几何尺寸



(b) 非局部损伤模型数值计算结果



(c) 直接拉伸构件有限元网格离散

结束

- 邮箱名：damage_mechanics@163.com
- 密码：sunshanglixue

